Un contre-exemple à un théorème de Birkhoff

François ALTER et Julien REYNIER
sous la direction d'Yves LASZLO

juin 1999

Abstract

Toute représentation du groupe fondamental de la sphère privée de n points peut-elle être réalisée comme représentation de monodromie d'un système différentiel à pôles simples?

1 Définitions préliminaires

1.1 Représentations d'un groupe

Définition 1 *Étant donnés un groupe G et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, on appelle représentation de G un morphisme de groupes $\rho : G \to GL(V)$.*

Cela revient à se donner une action linéaire de G sur V, ou encore à "voir" G comme un sous-groupe de $GL(n,\mathbb{C})$, d'où le terme représentation.

Définition 2 *On appelle représentation irréductible de G une représentation V de G qui n'admet pas de sous-espace strict stable sous l'action de G.*

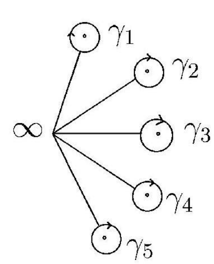
1.2 Groupe fondamental de la sphère privée de n points

Définition 3 *Soit X un espace topologique, et $x_0 \in X$ on dit que deux lacets $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ d'extrémité x_0 ($\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = x_0$) sont homotopes si il existe $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ continue telle que $H(0,.) = \gamma_0$, $H(1,.) = \gamma_1$ et $H(t,0) = H(t,1) = x_0, \forall t \in [0,1]$*

Définition 4 *On appelle groupe fondamental de l'espace pointé (X,x_0) le quotient de l'ensemble des lacets d'extrémité x_0 par la relation d'homotopie. On le note $\pi_1(X,x_0)$ et on montre que c'est un groupe pour la relation de concaténation des lacets. Si X est connexe par arc, on peut négliger le point x_0.(voir cours de topologie algébrique de monsieur Vogel)*

Définition 5 *On dit que X est simplement connexe si son groupe fondamental est trivial c'est à dire si tout lacet est homotope à un point.*

Proposition 1 *Le groupe fondamentale de la sphère S^2 privée de n points est le groupe libre à n éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ quotienté par la relation $\gamma_1 * \cdots * \gamma_n = 1$.*



Remarque 1 *La donnée d'une représentation du groupe fondamental de la sphère privée de n points est équivalente à celle de n matrices $M_1, \ldots, M_n$ de $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $M_1 \ldots . M_n = I_n$.*

2 Monodromie d'un système différentiel

2.1 Un exemple pour comprendre

On se donne l'équation différentielle

$$Y'(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1})Y(z)$$

Une solution est $y(z) = (\frac{z-1}{z+1})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ sur tout domaine simplement connexe de $S^2\backslash\{-1,1\}$ (en effet il n'y a pas de pôle à l'infini) où l'on a une détermination de $z \rightarrowtail z^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Nous obtenons donc une fonction multiforme sur $S^2\backslash\{-1,1\}$.

Maintenant, considérons le lacet: $\gamma(t) = 1+e^{2i\pi t}$: En chaque point de ce lacet, il existe une solution locale (par exemple, ici une série entière de rayon 1). On prolonge continûment de proche en proche la solution en suivant γ. L'argument de $y\circ\gamma(z)$ vaut: $\frac{1}{\sqrt{2}}(Arg(e^{2i\pi t}) - Arg(e^{2i\pi}+2))$ qui passe de $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ à $\frac{4\pi}{\sqrt{2}}$ lorsque t varie de 0 à 1. La solution locale de notre équation différentielle est donc multipliée par $e^{\frac{2i\pi}{\sqrt{2}}}$ lorsqu'on a suivi le lacet γ. Cette multiplication par une constante devient une multiplication par une matrice inversible associée à γ dans le cas d'un système différentiel, on a donc une représentation de π_1 associée au système différentiel.

Remarque 2 *Notre fonction est en fait définie naturellement sur le revêtement universel de $S^2\backslash\{-1,1\}$, c'est ce qu'on nomme fonction multiforme.*

2.2 Une présentation plus générale

Considérons le système différentiel méromorphe

$$Y'(z) = A(z).Y(z) \tag{2.1}$$

où Y est un vecteur de dimension q et A une matrice (q,q) méromophe sur S^2.

2.2.1 Systèmes différentiels holomorphes

Théorème 1 Cauchy-Lipschitz holomorphe: *Soit $Y_0 \in \mathbb{C}^q$, si A est holomorphe en z_0, alors il existe une unique solution holomorphe locale y du système (1) avec $y(z_0) = Y_0$. De plus, cette solution peut être définie sur le disque maximal sur lequel A est holomorphe.*

Preuve On cherche une solution sous forme de série formelle en développant en série entière A au voisinage de z_0 et en cherchant une relation de récurrence sur les coefficients de la série formelle,puis on montre qu'elle a un rayon de convergence non nul grâce à la méthode des séries majorantes.

■

Proposition 2 *Soit $\gamma : [0,1] \to S^2$ un chemin ne passant pas par un pôle de A, alors il existe une fonction continue unique y sur $[0,1]$ telle que pour tout $t_0 \in [0,1]$, il existe un voisinage de $\gamma(t_0)$, et une solution de (1) Y_{t_0} dans ce voisinage telle que $y(t) = Y_{t_0}(\gamma(t))$ si $\gamma(t)$ appartient au voisinage avec $y(0) = Y_0$. C'est ce qu'on appellera la solution le long de la courbe γ.*

Preuve Soit Ω un voisinage ouvert de $\gamma([0,1])$ sur lequel A est holomorphe. Soit $\delta < d(\gamma,\partial\Omega)$. γ est uniformément continue:$\exists\varepsilon > 0, |t-t'| < \varepsilon \Longrightarrow |\gamma(t) - \gamma(t')| < \delta/3$ Soient $t_0 < \cdots < t_n$ une subdivision de [0,1] de pas inférieur à ε. Soit D_i le disque de centre $\gamma(t_i)$ et de rayon δ. Soit Y_0 une solution de (1) dans D_0 avec pour condition initiale Y_0, soit Y_1 une solution de (1) dans D_1 telle que $Y_1(t_1) = Y_0(t_0)$ (en effet $t_1 \in D_0$) $\ldots$ soit Y_n une solution de (1) dans D_n,telle que $Y_n(t_n) = Y_{n-1}(t_n)$. On pose alors $y(t) = Y_i(\gamma(t))$ où $\gamma(t) \in D_i$.C'est une solution le long de la courbe, par connexité elle est unique.

■

Propriété 1 *Soient deux lacets homotopes γ_1 et γ_2 sur un ouvert où A est holomorphe, et soient f_1 et f_2 les deux solutions le long des deux courbes correspondantes de même condition intiale ($f_1(0) = f_2(0)$) alors $f_1(1) = f_2(1)$: elles ont la même condition finale.*

Preuve On montre ceci de même que la formule de Cauchy homotopique: sur deux chemins homotopes les intégrales d'une même fonction holomorphe le long de ces chemins sont égales.

■

2.2.2 Monodromie du système différentiel

Par ce que l'on a vu précédemment, si on note z_0 un point de l'ouvert Ω sur lequel A est holomorphe (typiquement l'∞ si on suppose A holomorphe à l'infini), alors pour tout lacet γ bouclant sur ce point, et pour toute condition initiale Y_0, nous pouvons définir une solution le long de la courbe et associer à la condition initiale $\gamma(0) = Y_0$ la condition finale $\gamma(1)$ que l'on notera $Y_0.\gamma$ ou $Y_0.[\gamma]$ puisque ne dépendant pas de la classe d'homotopie de γ. De plus il est clair que ceci respecte la loi de composition des lacets: $Y_0.(\gamma * \sigma) = (Y_0.\gamma).\sigma$ et que si on note 1 le lacet constant: $Y_0.1 = Y_0$. On obtient donc une action (à droite) du groupe fondamental de Ω sur $\mathbb{C}^q$.

Définition 6 *On nommera cette action qui fourni une représentation* $\rho : \pi_1(\Omega, z_0) \to GL_q(\mathbb{C})$ *la représentation de monodromie du système différentiel.*

3 Le problème inverse

On a vu que de tout système différentiel méromorphe à n pôles, on pouvait déduire une représentation du groupe fondamental de la sphère privée de n points. Cependant peut-on de toute représentation trouver un système différentiel du type précédent dont la représentation de monodromie corresponde?

Nous verrons que la réponse est positive si on se permet des pôles quelconques mais négative si on utilise seulement des pôles simples.

3.1 Petit historique du problème

Le problème énoncé dans le résumé commence à apparaître au début du vingtième siècle, on le nomme souvent problème de Riemann ou problème de Hilbert alors qu'il ne provient certainement d'aucun des deux. Il fut considéré longtemps comme résolu par les démonstrations de Plemelj et Birkhoff (en 1913). Cependant,il y a une dizaine d'année elles furent remise en question et récemment le mathématicien russe A. Bolibruch a mis à nu une série de contre-exemples dont nous présenterons le plus simple.

Nous verrons en fait de ceux-ci sont très fins car le résultat est presque toujours vrai.

3.2 L'étude locale

3.2.1 Revêtement universel

Définition 7 *Revêtement Soit X,Y deux espaces topologiques. Un revêtement est une application continue de X dans Y telle que pour tout y de Y, il existe un voisinage V de y dans Y vérifiant:* $\exists \alpha : f^{-1}(V) \to F$*(où F est un ensemble discret) avec* $\begin{cases} f^{-1}(V) & \to & V \times F \\ x & \rightarrowtail & (f(x), \alpha) \end{cases}$ *qui est un homéomorphisme.*

Proposition 3 *Revêtement universel Soit Y un espace topologique localement simplement connexe (cette hypothèse est toujours vérifiée dans le cas des variétés qui nous intéresse), il existe un espace topologique simplement connexe X tel qu'on puisse définir un revêtement de X dans Y (dit universel). On dira parfois par abus de langage que X est un revêtement universel de Y.*

Remarque 3 *Un revêtement universel d'une variété est une variété.*

Exemple 1 *Le revêtement universel du cercle de centre 0 et de rayon 1 dans* $\mathbb{C}$ *est par exemple une hélice infinie dans l'espace au dessus du cercle avec la projection naturelle sur le cercle.*

Remarque 4

1. *On a une détermination du log sur* $\widetilde{\mathbb{C}^*}$
2. *Les solutions de notre système sont dites multiformes, c'est à dire que ce sont des solutions sur* $\widetilde{S^2\Sigma}$

3.2.2 Singularités régulières

Soit D un disque ouvert de centre 0 dans $\mathbb{C}$ et $D^* = D \backslash \{0\}$, et $\pi : \widetilde{D^*} \rightarrowtail D^*$ un revêtement universel de D^*. On choisit un logarithme sur $\widetilde{D^*}$, et on pose $z^M := e^{M.log(z)}$.

Définition 8 *Soit f une fonction holomorphe sur* $\widetilde{D^*}$*, On dira qu'elle est à croissance polynômiale s'il existe un réel r qui vérifie:*

$$\lim_{z \to 0} z^{-r} f(s(z))) = 0$$

pour toute section locale s de π*. Le plus grand entier* ν *tel que cela ait lieu pour tout* $r < \nu$ *s'appelle l'ordre de f en zéro, on le note* ν*(f)*

Exemple 2 *La fonction multiforme* $z^{\lambda}(log(z))^k$ *est à croissance polynômiale d'ordre* $\lfloor \mathfrak{Re}(\lambda) \rfloor$.

Définition 9 *On suppose que dans (1) A est holomorphe dans* D^*. *On dira alors que (1) a une singularité régulière en zéro si toutes ses solutions ont une croissance polynômiale.*

Proposition 4 *Un pôle simple de A(z) est une singularité régulière:* **Preuve** $|\|Y\|'| = |\frac{<Y',Y>}{\|Y\|}| \leqslant \|Y'\| \leqslant \|A(z).Y(z)\|$.

De plus A(z)=$\frac{A_0}{z} + B(z)$*, avec B(z) holomorphe en zéro, donc majorée en norme par un réel m pour tout z dans une boule B(0,*η*) avec* η *suffisamment petit. Si de plus on note* $a_0 = \|A_0\|$*, on a alors:*

$$pour |z| < \eta : |\|Y(z)\|'| \leqslant (\frac{a_0}{|z|} + m).\|Y(z)\|$$

Nous intégrons cette inégalité : $\|Y(z)\| \leqslant \|Y\|_{ini}.|z|^{-a_0} e^{m|z|}$ *donc 0 est d'ordre au moins* $-a_0$.

■

Remarque 5 *Un pôle d'ordre arbitrairement grand peut être une singularité régulière.*

3.2.3 Retour au système différentiel

Choisissons une base S de l'espace des solutions de (1), nous notons Y(z) la matrice fondamentale des solutions, et M la matrice de monodromie autour de notre pôle. Soit L l'unique matrice carrée (q,q) de valeurs propres λ ($0 \leqslant \lambda < 1$) telle que $e^{2i\pi L}$=M. Comme $Y(z)z^{-L}$ est invariante par la monodromie (en effet elle devient $(Y(z)M).(e^{2i\pi}z)^{-L} = Y(z).MM^{-1}.z^{-L}$), on peut en déduire une application holomorphe de D^* dans $M_q(\mathbb{C})$ (elle est à priori multiforme sur D^*, mais en fait, comme elle est invariante par monodromie, elle a une unique détermination). Remarquons que (1) admet une singularité régulière en 0 si et seulement si Y(z).z^{-L} est méromorphe en zéro (en effet z^{-L} est à croissance polynômiale).

Proposition 5 *Lorsque (1) admet une singularité régulière en 0, ses solutions sont des sommes de fonctions vectorielles du type* $z^{\lambda}(log(z))^k\phi(z)$ *où* $\lambda \in \mathbb{C}$ *,* $k \in \mathbf{N}$ *et* ϕ *est holomorphe dans D*

Preuve $\mathbf{Y}(z)z^{-L}$ est méromorphe en 0. nous pouvons donc écrire chacune de ses colonnes sous la forme $\frac{\phi(z)}{z^m}$. La multiplication par z^L donne la forme générale.

■

Supposons que (1) admette une singularité régulière en 0, posons F^{ν}(S):=$\{y \in S/\nu(y) \leqslant \nu\}$, c'est un espace vectoriel. Soit $\nu^1 \geqslant \cdots \geqslant \nu^q$ la suite des ordres des solutions de (1), c'est à dire les entiers ν tels que $F^{\nu} \neq F^{\nu+1}$, répétés avec mutiplicité dim($F^{\nu}/F^{\nu+1}$) et $y_1, \ldots, y_q$ une base de S telle que $\nu^i = \nu(y_i)$ en zéro.

Remarque 6 *Nous voyons que pour tout autre base* $(u_1, \ldots, u_q)$ *dont les ordres sont croissants :* $\nu(u_i) \leqslant \nu^i$

Proposition 6 F^{ν} *est invariante par la monodromie M.*

Preuve Ceci est clair vu la forme des solutions car l'ordre de $z^{\lambda}(log(z))^k\phi(z)$ est $\lfloor \mathfrak{Re}(\lambda) \rfloor$ et ne change pas par monodromie.

■

Proposition 7 *La matrice de monodromie M est donc triangulaire supérieure dans une base du type précédent; cette base qui est dite adaptée à S en zéro*

Preuve Les F^{ν} forment un drapeau, donc on peut trigonaliser en respectant l'ordre des ν^i.

■

Proposition 8 *Dans une base adaptée, Y(z)=V(z)*$z^L z^N$ *avec V(z) holomorphe et N=diag(*$\nu_1, \ldots, \nu_q$*).*

Preuve $Y(z)z^{-L}$ est méromorphe, en multipliant par z^{-N}, la singularité disparaît.

■

3.3 Caractérisation d'un pôle simple

Théorème 2 *Supposons que (1) ait une singularité régulière en 0. Soit $(y_1,\dots,y_q)$=Y(z) une base adaptée de S. A a un pôle simple en 0 si et seulement si Y(z)= $V(z)z^N z^L$ où V est holomorphe et inversible dans D. On rappelle que $e^{2i\pi L}=M$ et N=diag($\nu_1,\dots,\nu_q$).*

Preuve Si Y(z)=$V(z)z^N z^L$, on a $A(z)=Y'(z).Y(z)^{-1}=V'(z).V(z)^{-1}+\frac{1}{z}V(z).(N+z^N Lz^{-N}).V(z)^{-1}$. Comme L est triangulaire supérieure, $z^N Lz^{-N}$ est holomorphe (on a en effet que des termes du type $z^{\nu_i-\nu_j}$ avec $i\leqslant j$ donc $\nu_i\geqslant\nu_j$); A(z) a donc un pôle simple en 0. Nous admettrons la réciproque.

■

Corollaire 1 *Soit A_0 la matrice des résidus de A(z) en 0. Le nombre $Tr(A_0-N-L)$ est un entier positif; il est nul si et seulement si A(z) a au plus un pôle simple à l'origine.*

Preuve Soit Y(z)=$V(z)z^N z^L$, une matrice fondamentale de solutions correspondant à une base adaptée de S.

$$\frac{d}{dz}logdetY(z)=\frac{d}{dz}logdetV(z)+\frac{TrN}{z}+\frac{TrL}{z}$$

Nous remarquons aussi en testant sur les matrices diagonales, puis par un raisonnement de densité que:

$$\frac{d}{dz}logdetY(z)=Tr(Y'(z)Y(z)^{-1})=TrA(z)$$

l'examen du coefficient de $\frac{1}{z}$ donne $Tr(A_0-N-L)=\nu(detV(z))$.

■

4 Un contre-exemple dans le cas des pôles simples

4.1 La difficulté pour en trouver

4.1.1 Si on reste proche de l'identité

Cette démonstration est due au mathématicien russe I. Lappo-Danilevskiĭ en 1928. Il décrit les solutions du système (1) explicitement grâce à des séries polylogarithmiques.

Si on suppose A méromorphe à n pôles simples et holomorphe à l'infini, le système s'écrit plus simplement:

$$A(z)=\sum_{\alpha\in\Sigma}\frac{A_\alpha}{z-\alpha} \tag{4.2}$$

où Σ est l'ensemble des n pôles de A et $\sum_{\alpha\in\Sigma}A_\alpha=0$.

On note $\widetilde{U}$ le revêtement universel de $S^2\backslash\Sigma$, et o son point base. Soit Σ^* l'ensemble des suites finies d'éléments de Σ. On définit alors par récurrence les fonctions L_σ sur $\widetilde{U}$, pour $\sigma\in\Sigma^*$, par:

1. L_σ:= 1 si σ est vide,
2. Si $\sigma=\sigma'.\alpha$, on pose $L_\sigma(z)=\int_o^z\frac{L_{\sigma'}(u)}{u-\alpha}du$.

Pour $\sigma=(\alpha_1,\dots,\alpha_p)$, on pose $A_\sigma:=A_{\sigma_p}\dots A_{\sigma_1}$. Alors

Proposition 9

$$Y(z)=\sum_{\sigma\in\Sigma^*}L_\sigma(z)A_\sigma$$

est une matrice fondamentale de solutions de (1).

Preuve

1. On montre d'abord la convergence de la série:
   $\exists$ M $\in I\!R$ tel que $\forall\alpha\in\Sigma,\|A_\alpha\|\leqslant M$; on a

$$\|Y(z)\|\leqslant\sum_{\sigma\in S(\Sigma)}|L_\sigma(z)|M^{|\sigma|}\leqslant\sum_{k\in\mathbf{N}}(\sum_{|\sigma|=k}L_\sigma(z))M^k$$

   Or nous avons par récurrence : $\forall z/|z|\leqslant min|\alpha|;|L_\sigma(z)|\leqslant 1$:

$$|L_\sigma(z)|\leqslant\frac{1}{|\alpha_p|}\int_0^z\frac{du}{1-\frac{|u|}{|\alpha_p|}}\leqslant|log(1-\frac{|z|}{|\alpha_p|})|\leqslant\frac{|z|}{|\alpha_p|}\leqslant 1$$

2. Elle vérifie la relation $Y'(z) = A(z)Y(z)$,

3. $Y(o) = I_q$.

■

On a donc pour $\alpha \in \Sigma$, la matrice de monodromie M_α est égale à $Y(o_\alpha)$ où o_α est le transformé dans $\widetilde{U}$ de o par $\gamma_\alpha \in \pi_1(S^2 \backslash \Sigma)$ qui est un tour autour de α.

Lorsque $\sigma = (\alpha)$, on a $L_\sigma(o_\beta) = L_\sigma(o) = O$ pour $\beta \neq \alpha$, et $L_\sigma(o_\alpha) = 2\pi i$. D'où

$$M_\alpha = I_q + 2\pi i A_\alpha + \sum_{Card(\sigma)>1} L_\sigma(o_\alpha) A_\alpha$$

On en déduit que l'application $A_\alpha \rightarrowtail M_\alpha$ est analytique, et que son application tangente à l'origine est inversible. Le théorème d'inversion locale nous permet donc de conclure:

Théorème 3 *Les matrices M_α sont les matrices de monodromie d'un système à n pôles simples si elles sont suffisamment proches de l'identité.*

4.1.2 Si l'une des matrices est diagonalisable

C'est en fait la démonstration de Birkhoff que nous n'étudierons pas, mais nous retiendrons le fait que:

Théorème 4 *Dès que une des matrices M_α est diagonalisable, alors le problème admet une solution, c'est à dire que il existe A avec n pôles simples telle que les M_α soient les matrices de monodromie associées.*

4.1.3 Si la représentation est irréductible

Récemment, Kostov et indépendamment Bolibruch ont démontré:

Théorème 5 *Toute représentation irréductible de $\pi_1(S^2 \backslash \Sigma)$ est la représentation de monodromie d'un système à pôles simples.*

On déduit de cela que presque toutes les représentations sont la représentation de monodromie d'un système à pôles simples. En effet, il y a beaucoup de représentation irréductible. Plus précisément, on a:

Proposition 10 *L'ensemble des représentations irréductibles contient un ouvert dense de l'ensemble des représentations dont le complémentaire est de mesure nulle dés que l'on a $n = Card(\Sigma) > 2$.*

4.2 Le contre-exemple

4.2.1 Rappel des notations

Le système étudié est à singularités régulières :

$$y'(z) = A(z)y(z)$$

où $A : z \mapsto A(z)$ est méromorphe sur S^2, et à pôles dans l'ensemble Σ. Pour $\alpha \in \sigma$, nous noterons $\nu_\alpha^1 \geqslant \cdots \geqslant \nu_\alpha^n$ la suite des ordres en α; N_α est la matrice $diag(\nu_\alpha^1, \ldots, \nu_\alpha^n)$. Après avoir choisi une base de S (l'espace vectoriel des solutions), nous notons M_α, la matrice de monodromie en α et L_α, la matrice L correspondante que nous avions vu dans l'étude locale.

4.2.2 Un théorème

Théorème 6 *Soit $\rho : \pi_1(S^2 \backslash \Sigma) \rightarrow Gl_q(\mathbb{C})$ une représentation satisfaisant les hypothèses suivantes :*

1. *ρ n'est pas irréductible*

2. *Chacune des matrices M_α a une seule valeur propre μ_α et un seul bloc de Jordan*

3. $\prod_{\alpha \in \Sigma} \mu_\alpha \neq 1$

Alors ρ n'est pas isomorphe à la représentation de monodromie d'un système différentiel à pôles simples

Pour cela on utilise le corollaire de l'étude locale pour obtenir:

Lemme 1 *On a $\sum_{\alpha \in \Sigma} Tr(N_\alpha + L_\alpha) \leqslant 0$; avec le cas d'égalité si et seulement si tous les pôles de A(z) sont simples.*

Preuve On utilise le fait que $\sum_{\alpha \in \Sigma} A_\alpha = 0$ et on somme le résultat du corollaire établi dans l'étude locale.

■

On peut donc donner la démonstration du théorème: **Preuve O**n suppose par l'absurde que ρ s'identifie à la représentation de monodromie d'un système différentiel à pôles n simples du type (1). Soit S l'espace des solutions et $\overline{\mathrm{S}}$ un sous-espace non trivial de S invariant par ρ, et p sa dimension (en effet ρ n'est pas irréductible par hypothèse).

Si on choisit une base de S où les p premiers vecteurs forment une base de $\overline{\mathrm{S}}$, alors les matrices M_α s'écrivent:

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \overline{M}_\alpha & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

La matrice fondamentale de solutions correspondante s'écrit sous la forme:

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \overline{Y}(z) & * \\ U(z) & * \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} \overline{Y}(z) \\ U(z) \end{pmatrix}$ étant de rang p car Y est inversible admet p lignes linéairement indépendantes; en multipliant $Y(z)$ à gauche par une matrice de permutation, on peut supposer que $det\overline{Y}(z)$ n'est pas identiquement nulle. La matrice $\overline{Y}'(z)\overline{Y}(z)^{-1}$ est méromorphe sur le revêtement universel de $S^2\backslash\Sigma$, invariante par monodromie, et à croissance polynômiale aux points de Σ; elle provient donc d'une matrice $\overline{A}(z)$ méromorphe sur S^2. $\overline{Y}(z)$ est donc la matrice fondamentale de solutions du système différentiel

$$\overline{y}'(z) = \overline{A}(z)\overline{y}(z). \tag{4.3}$$

Ce système est à singularités régulières qui proviennent des points de Σ et de Σ', l'ensemble des zéros de $\det\overline{Y}(z)$. Cependant, aux points de Σ', les solutions sont holomorphes car $\overline{Y}(z)$ l'est. La monodromie est donc triviale, et les ordres sont positifs en ces points.

Soit $\alpha \in \Sigma$, la monodromie en α du système (3) et donnée par la matrice $\overline{M}_\alpha$, d'après la forme de M_α. Comparons les ordres de (3) en α à ceux de (1); soit $(y_1,\ldots,y_n)$, une base adaptée de S en α. Le sous-espace engendré pas $(y_1,\ldots,y_p)$ est $\overline{S}$. En effet, comme M_α a un unique bloc de Jordan, $\overline{S}$ est son unique sous-espace de dimension p stable. Or par définition de base adaptée, M_α y est trigonale. On obtient donc une base de solutions $(\overline{y}_1,\ldots,\overline{y}_p)$ de (3) en supprimant les n-p dernières coordonnées des vecteurs $y_1,\ldots,y_p$. Remarquons enfin que $\nu_\alpha(\bar(y)_i) \geqslant \nu_\alpha(y_i) = \nu_a^i lpha$, ainsi les ordres de (3) en α vérifient (comme on l'avait noté dans l'étude locale):

$$\sum_{i=1}^{p}\overline{\nu}_\alpha^i \geqslant \sum_{i=1}^{p}\nu_\alpha(\overline{y}_i) \geqslant \sum_{i=1}^{p}\nu_\alpha^i$$

Comme la matrice M_α a une unique valeur propre μ_α, L_α a une unique valeur propre $\lambda = \frac{log\mu_\alpha}{2\pi i}$ (avec $0 \leqslant \Re(\lambda_\alpha) < 1$). Le lemme nous fournit donc la série d'inégalités suivante :

$$0 \geqslant \sum_{\alpha\in\Sigma}(\sum_{i=1}^{p}\overline{\nu}_\alpha^i + p\lambda_\alpha) + \sum_{1\leqslant i\leqslant n, \beta\in\Sigma'}\nu_\beta^i \geqslant \sum_{\alpha\in\Sigma}(\sum_{i=1}^{p}\nu_\alpha^i + p\lambda_\alpha) \geqslant \frac{p}{n}\sum_{\alpha\in\Sigma}(\sum_{i=1}^{p}\nu_\alpha^i + n\lambda_\alpha) = 0$$

La dernière inégalité exprime que la moyenne des $(\nu_\alpha^1,\ldots,\nu_\alpha^p)$ est supérieure à celle des $(\nu_\alpha^1,\ldots,\nu_\alpha^n)$ (on a $\nu_\alpha^1 \geqslant \cdots \geqslant \nu_\alpha^n$) On déduit alors que $\nu_\alpha^1 = \cdots = \nu_\alpha^n$, pour tout $\alpha \in \Sigma$, et $\sum_{\alpha\in\Sigma}(\nu_\alpha^1 + \lambda_\alpha) = 0$. En prenant l'exponentielle, il vient $\prod_{\alpha\in\Sigma}\mu_\alpha = 1$, ce qui contredit la dernière hypothèse.

■

Exemple 3 *Les hypothèses du théorème imposent : $n \geqslant 4$*

Les trois matrices suivantes conviennent :

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_\beta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} M_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

En effet $M_\alpha M_\beta M_\gamma$=I.On voit trivialement que ces matrices n'ont qu'une seule valeur propre (1;1 et -1) ; elles n'ont qu'un seul bloc de Jordan. Ainsi, la représentation de $\pi_1(S^2\backslash\{a,b,c\})$ définie par ces trois matrices ne peut être réalisée comme représentation de monodromie d'un système différentiel a pôles simples.

5 Conclusion

Le ”théorème” de Birkhoff reste vrai dans le cas générique (presque toute représentation est irréductible et toute matrice, diagonalisable sur $\mathbb{C}$). C’est de là que provient la difficulté à trouver un contre-exemple. On notera tout de même qu’un théorème avec des contre-exemples est resté vrai pendant près de 80 ans. Ceci illustre à quel point les mathématiques sont un art difficile, même les meilleurs peuvent se tromper, et une erreur peut mettre très longtemps à être corrigée.

References

[1] Arnaud BEAUVILLE ; *Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann* ; Séminaire N. Bourbaki, mars 1993

[2] A.A. BOLIBRUCH ; *Fuchian System with reductible monodromy and the Riemann-Hilbert problem* ; L.N.M. 1520

[3] Henri CARTAN ; *Théorie Élémentaire des fonctions analytiques d’une ou de plusieurs variables complexes* ; Herman, 1977

[4] Claude GODBILLON ; *Groupe fondamental et Revêtements*, 1969

[5] R. et A. DOUADY ; *Algèbres et Théories Galoisiennes*; Nathan, 1969