Gestion dynamique de files d'attente dans des routeurs TCP

Mémoire du Magistère de Mathématiques Fondamentales et Appliquées Inter-Universités

Julien Reynier

Le 2 octobre 2001

Résumé

Ce mémoire de troisième année de magistère se propose de résumer toutes les activités en mathématiques et en informatique que j'ai pu avoir dans le cadre du magistère. Il commence par un bref *curriculum vitae* scientifique, puis une courte introduction à mon (futur) domaine de recherche, l'étude des files d'attentes dans les réseaux à commutation de paquet. Enfin, il se termine par la copie des différents mémoires et exposés que j'ai tapés durant ces trois années.

Table des matières

Première partie

Présentation

CV du MMFAI

Julien REYNIER
né le 28 février 1978 à Strasbourg
45, rue d'ULM, 75005 Paris
E-mail : Julien.Reynier@ens.fr
http://www.eleves.ens.fr/~jreynier

2000-2001 : Troisième année de Magistère

DEA d'Algoritmique (X, Ulm, Cachan, Paris VI et VII) :

- Stage de DEA sous la direction de David Mc DONALD à l'Université d'Ottawa (Ontario, Canada) en collaboration avec Nortel networks. :
- Filière spécialisée *Réseaux* coordonnée par François BACCELLI
- Filière spécialisée *Cryptographie* coordonnée par Jacques STERN
- Cours fondamentaux : *Automates* d'Antoine PETIT, *Complexité* d'Anca MÖSHOLL, *Systèmes répartis* de Sam TWEG, *Téléphonie Mobile* de Daniel KROB

1999-2000 : Deuxième année de Magistère

- **Agrégation** de Mathématiques (admis)
- Septembre-Octobre, séjour d'étude à l'**Université Indépendante de Moscou**, cours suivis : *Dessins d'Enfants* d'après Alexander GROTHENDIECK par Fedor PAKOVITCH, *Systèmes Dynamiques Non-Commutatifs* par Alexander BUFIETOV, *Fonctions Génératrices en Deux Variables* par Serge LANDO, *Invariants de Vassiliev et Polynômes de Jones* (théorie des noeuds) A. SOSSINSKI, groupe de travail avec les étudiants russes, **Exposé** d'analyse convexe : *Sur le théorème d'Ekeland et certaines de ses conséquences* d'après des résultats d'Ivar EKELAND.

1998-1999 : Première année de Magistère

- **Maîtrise de Mathématiques** :
  - Mémoire de Maîtrise avec la collaboration de François ALTER sous la direction d'Yves LASZLO
  - *Algèbre II* par L.ILLUSIE, *Topologie Algébrique* par P. VOGEL, *Analyse II* par F. BETHUEL, *Images Digitales* par.
- **Licence de Mathématiques** : *Analyse I* par I. EKELAND,*Algèbre I* par A. BEAUVILLE, *Analyse Complexe* par J. FARAUT, *Intégration et Probabilités* par F. COMETS, *Logique Mathématique* par A. LOUVEAU, *Introduction à l'algorithmique* par J. STERN, *Matériel* par M. VUILLEMIN.

Juillet 1998 : Admis à l'École Normale Supérieure et à l'École Polytechnique.

Introduction au Domaine de Recherche

0.1 Réseaux et mathématiques

Quand on dit que les réseaux sont aujourd'hui au centre de la vie, on pense à la téléphonie mobile et à Internet, mais ils faisaient partie de notre vie depuis bien longtemps puisque les postes, le courant, le train, les routes par exemple sont organisées en réseaux. On peut voir un réseau comme l'ensemble des voies de circulation permettant la circulation de denrées entre les noeuds du réseau (clients et fournisseurs par exemple). Si les réseaux comme la poste sont déjà bien organisés (ie: les suggestions des mathématiciens ne les intéressent pas trop), les nouveaux réseaux sont en construction, et l'analyse mathématique est la bienvenue lorsqu'elle permet de donner des garanties de performances et d'améliorer les algorithmes employés. Dans le langage des "nouvelles technologies", on parle de qualité de service pour ces évaluations de performances. Actuellement, à cause de la lenteur relative des mathématiques, dans de nombreux domaines, aucune modélisation satisfaisante n'existe, et on doit se contenter essentiellement des simulations plus ou moins exhaustives des ingénieurs du domaine. Parfois on doit s'attaquer à l'amendement de systèmes qui ont été déployés à grande échelle qui sont très mauvais sous beaucoup d'angles. C'est le cas en particulier d'Internet et des protocoles regroupés sous l'appellation TCP/IP qu'il utilise. Son "design" (conception) était adapté aux premiers réseaux et basé sur le principe du datagramme (comme la poste). Aujourd'hui, il pose un grand nombre de problèmes qui intéressent les mathématiciens,

0.2 TCP/IP

0.2.1 Les couches

L'architecture d'internet et des ordinateurs se fait selon des couches (layer en anglais) qui sont normalisés. Ceci permet d'organiser la collaboration entre les programmeurs et les concepteurs de matériel informatique. Le principe est le même que celui qui est employé en programmation orientée Objet (C++), la communication entre les différentes couches se fait par l'intermédiaire de fonctions (les objets publics déclarés dans le fichier header) uniquement entre une couche celle qui la suit et celle qui la précède, c'est à dire qu'on a pas à savoir comment sont implémentées les couches plus profondes.

0.2.2 Des fils à IP

Dans le cas d'Internet, on fait circuler l'information sous forme de paquets, c'est à dire d'une séquence de bits d'information. La longueur n'est pas fixée, mais elle est habituellement de l'ordre de 500 octets (4000 bits) on a une couche matérielle, composée des fils, des fibres optiques et de leurs répéteur... Ce qui compte est la quantité d'information qu'on peut y faire transiter. Ensuite vient une couche dite réseau, c'est par exemple le protocole ethernet qui permet de faire transiter des paquets (Le mot protocole désigne un ensemble d'algorithmes normalisés utilisé en informatique). Ensuite vient la couche du protocole IP qui est l'adressage sur internet, comme une adresse postale mais sous la forme de 4 octets, les adresses DNS que nous connaissons par exemple clipper.ens.fr sont en fait un nom qui est traduit par notre serveur DNS en 129.199.96.1. (c'est pour cela que nous devons fournir l'adresse du serveur DNS sous sa forme IP). Le protocole IP contient aussi le routage des paquets à travers le réseau. Alors que les couches précédentes sont entièrement implémentées en matériel, la gestion des adresse IP est faite par le système d'exploitation.

0.2.3 TCP sur IP

TCP est le protocole dont les applications de l'ordinateur d'un client du réseau vont devoir communiquer. Il contient une correction d'erreurs, le découpage en paquets de taille adaptée, et tout ce qui concerne la transmission, y compris la prise en charge de la perte de paquets. La correction d'erreurs se fait essentiellement par un CRC, c'est à dire un code à redondance cyclique (si on considère la suite de bits comme un polynôme dans $\mathbb{F}_2$, il s'agit du reste dans la division euclidienne par un polynôme irréductible de degré bien choisi), et le renvoi des paquets défectueux. L'envoi des paquets proprement dit comporte toujours une quantité nommée la fenêtre, c'est le nombre de paquets de la connexion dans le réseau, et des processus pour l'augmenter ou la réduire, une fois le paquet reçu, la cible envoie un accusé de réception (ACK pour acknowledgment). Ce qui fait que TCP est mauvais est en particulier le fait qu'il ne contient rien pour gérer les congestions possibles du réseau, tout au plus il réagit à la perte de paquets.

TCP-Reno

C'est la version la plus courante de TCP, elle est implémentée dans Windows parfois sous la forme New-Reno qui diffère peu, en concurrence de TCP-SACKS (les différences sont à chaque fois dans la gestion des pertes de paquets). La gestion de la fenêtre se fait selon trois états, "slow-start", "congestion avoidance" et "timeout". En slow-start, la source envoie deux paquets à chaque ACK reçu, et on passe en congestion avoidance si un paquet est perdu (on divise la fenêtre par deux au passage), ou si on atteint un seuil fixé par le récepteur. En congestion avoidance, on augmente la fenêtre d'un paquet toutes les fenêtres passées sans dommage, si un paquet est perdu et que les ACK des deux suivants arrivent, on pratique un "fast-retransmit" on divise par deux la fenêtre (ie : on envoie pas de paquet tant qu'on a pas reçu l'ACK de la moitié des paquets envoyés), et on reste en congestion avoidance. Si Fast-retransmit ne peut pas se produire, on passe en timeout, c'est à dire que la source n'envoie plus rien pendant un temps fixé (qui double en principe à chaque timeout). Ensuite on repart avec une fenêtre à 1 comme si c'était une nouvelle connexion.

0.3 Article

Le futur article encore incomplet correspond à un exposé fait aux ingénieurs de NORTEL qui posaient le problème à Ottawa, puis à une présentation qui a tenu lieu de soutenance de DEA de retour à Paris. On peut consulter l'article à la fin.

Deuxième partie

Travaux

Mémoire de Maîtrise effectué en équipe avec François Alter sous la direction d'Yves Laszlo

Chapitre 1

Un contre-exemple à un théorème de Birkhoff

Résumé

Toute représentation du groupe fondamental de la sphère privée de n points peut-elle être réalisée comme représentation de monodromie d'un système différentiel à pôles simples?

1.1 Définitions préliminaires

1.1.1 Représentations d'un groupe

Définition 1 — *Étant donnés un groupe G et un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, on appelle représentation de G un morphisme de groupes $\rho : G \to GL(V)$.*

Cela revient à se donner une action linéaire de G sur V, ou encore à "voir" G comme un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{C})$, d'où le terme représentation.

Définition 2 — *On appelle représentation irréductible de G une représentation V de G qui n'admet pas de sous-espace strict stable sous l'action de G.*

1.1.2 Groupe fondamental de la sphère privée de n points

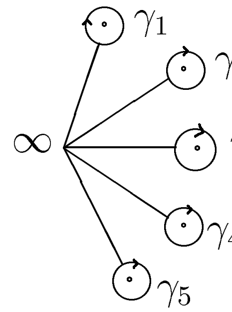
Définition 3 — *Soit X un espace topologique, et $x_0 \in X$ on dit que deux lacets $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ d'extrémité x_0 ($\gamma_i(0) = \gamma_i(1) = x_0$) sont homotopes si il existe $H : [0,1] \times [0,1] \to X$ continue telle que $H(0,.) = \gamma_0$, $H(1,.) = \gamma_1$ et $H(t,0) = H(t,1) = x_0, \forall t \in [0,1]$*

Définition 4 — *On appelle groupe fondamental de l'espace pointé (X, x_0) le quotient de l'ensemble des lacets d'extrémité x_0 par la relation d'homotopie. On le note $\pi_1(X, x_0)$ et on montre que c'est un groupe pour la relation de concaténation des lacets. Si X est connexe par arc, on peut négliger le point x_0.(voir cours de topologie algébrique de monsieur Vogel)*

Définition 5 — *On dit que X est simplement connexe si son groupe fondamental est trivial c'est à dire si tout lacet est homotope à un point.*

Proposition 1 — *Le groupe fondamentale de la sphère S^2 privée de n points est le groupe libre à n éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ quotienté par la relation $\gamma_1 * \cdots * \gamma_n = 1$.*

Remarque 1 — La donnée d'une représentation du groupe fondamental de la sphère privée de n points est équivalente à celle de n matrices $M_1, \ldots, M_n$ de $GL_n(\mathbb{C})$ telles que $M_1. \ldots .M_n = I_n$.



1.2 Monodromie d'un système différentiel

1.2.1 Un exemple pour comprendre

On se donne l'équation différentielle

$$Y'(z) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)Y(z)$$

Une solution est $y(z) = (\frac{z-1}{z+1})^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ sur tout domaine simplement connexe de $S^2\backslash\{-1,1\}$ (en effet il n'y a pas de pôle à l'infini) où l'on a une détermination de $z \rightarrowtail z^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$. Nous obtenons donc une fonction multiforme sur $S^2\backslash\{-1,1\}$.

Maintenant, considérons le lacet: $\gamma(t) = 1 + e^{2i\pi t}$: En chaque point de ce lacet, il existe une solution locale (par exemple, ici une série entière de rayon 1). On prolonge continûment de proche en proche la solution en suivant γ. L'argument de $y \circ \gamma(z)$ vaut: $\frac{1}{\sqrt{2}}(Arg(e^{2i\pi t}) - Arg(e^{2i\pi} + 2))$ qui passe de $\frac{2\pi}{\sqrt{2}}$ à $\frac{4\pi}{\sqrt{2}}$ lorsque t varie de 0 à 1. La solution locale de notre équation différentielle est donc multipliée par $e^{\frac{2i\pi}{\sqrt{2}}}$ lorsqu'on a suivi le lacet γ. Cette multiplication par une constante devient une multiplication par une matrice inversible associée à γ dans le cas d'un système différentiel, on a donc une représentation de π_1 associée au système différentiel.

Remarque 2 — Notre fonction est en fait définie naturellement sur le revêtement universel de $S^2\backslash\{-1,1\}$, c'est ce qu'on nomme fonction multiforme.

1.2.2 Une présentation plus générale

Considérons le système différentiel méromorphe

$$Y'(z) = A(z).Y(z) \tag{1.1}$$

où Y est un vecteur de dimension q et A une matrice (q,q) méromophe sur S^2.

Systèmes différentiels holomorphes

Théorème 1 — Cauchy-Lipschitz holomorphe: *Soit $Y_0 \in \mathbb{C}^q$, si A est holomorphe en z_0, alors il existe une unique solution holomorphe locale y du système (1) avec $y(z_0) = Y_0$. De plus, cette solution peut être définie sur le disque maximal sur lequel A est holomorphe.*

Démonstration. On cherche une solution sous forme de série formelle en développant en série entière A au voisinage de z_0 et en cherchant une relation de récurrence sur les coefficients de la série formelle,puis on montre qu'elle a un rayon de convergence non nul grâce à la méthode des séries majorantes. ■

Proposition 2 — *Soit $\gamma : [0,1] \to S^2$ un chemin ne passant pas par un pôle de A, alors il existe une fonction continue unique y sur $[0,1]$ telle que pour tout $t_0 \in [0,1]$, il existe un voisinage de $\gamma(t_0)$, et une solution de (1) Y_{t_0} dans ce voisinage telle que $y(t) = Y_{t_0}(\gamma(t))$ si $\gamma(t)$ appartient au voisinage avec $y(0) = Y_0$. C'est ce qu'on appellera la solution le long de la courbe γ.*

Démonstration. Soit Ω un voisinage ouvert de $\gamma([0,1])$ sur lequel A est holomorphe. Soit $\delta < d(\gamma, \partial\Omega)$. γ est uniformément continue:$\exists \varepsilon > 0, |t - t'| < \varepsilon \Longrightarrow |\gamma(t) - \gamma(t')| < \delta/3$ Soient $t_0 < \cdots < t_n$ une subdivision de [0,1] de pas inférieur à ε. Soit D_i le disque de centre $\gamma(t_i)$ et de rayon δ. Soit Y_0 une solution de (1) dans D_0 avec pour condition initiale Y_0, soit Y_1 une solution de (1) dans D_1 telle que $Y_1(t_1) = Y_0(t_0)$ (en effet $t_1 \in D_0$) ... soit Y_n une solution de (1) dans D_n,telle que $Y_n(t_n) = Y_{n-1}(t_n)$. On pose alors $y(t) = Y_i(\gamma(t))$ où $\gamma(t) \in D_i$.C'est une solution le long de la courbe, par connexité elle est unique.

■

Propriétés. *Soient deux lacets homotopes γ_1 et γ_2 sur un ouvert où A est holomorphe, et soient f_1 et f_2 les deux solutions le long des deux courbes correspondantes de même condition intiale ($f_1(0) = f_2(0)$) alors $f_1(1) = f_2(1)$: elles ont la même condition finale.*

Démonstration. On montre ceci de même que la formule de Cauchy homotopique: sur deux chemins homotopes les intégrales d'une même fonction holomorphe le long de ces chemins sont égales. ■

Monodromie du système différentiel

Par ce que l'on a vu précédemment, si on note z_0 un point de l'ouvert Ω sur lequel A est holomorphe (typiquement l'∞ si on suppose A holomorphe à l'infini), alors pour tout lacet γ bouclant sur ce point, et pour toute condition initiale Y_0, nous pouvons définir une solution le long de la courbe et associer à la condition initiale $\gamma(0) = Y_0$ la condition finale $\gamma(1)$ que l'on notera $Y_0.\gamma$ ou $Y_0.[\gamma]$ puisque ne dépendant pas de la classe d'homotopie de γ. De plus il est clair que ceci respecte la loi de composition des lacets: $Y_0.(\gamma * \sigma) = (Y_0.\gamma).\sigma$ et que si on note 1 le lacet constant: $Y_0.1 = Y_0$. On obtient donc une action (à droite) du groupe fondamental de Ω sur $\mathbb{C}^q$.

Définition 6 — *On nommera cette action qui fourni une représentation $\rho : \pi_1(\Omega, z_0) \to GL_q(\mathbb{C})$ la représentation de monodromie du système différentiel.*

1.3 Le problème inverse

On a vu que de tout système différentiel méromorphe à n pôles, on pouvait déduire une représentation du groupe fondamental de la sphère privée de n points. Cependant peut-on de toute représentation trouver un système différentiel du type précédent dont la représentation de monodromie corresponde?

Nous verrons que la réponse est positive si on se permet des pôles quelconques mais négative si on utilise seulement des pôles simples.

1.3.1 Petit historique du problème

Le problème énoncé dans le résumé commence à apparaître au début du vingtième siècle, on le nomme souvent problème de Riemann ou problème de Hilbert alors qu'il ne provient certainement d'aucun des deux. Il fut considéré longtemps comme résolu par les démonstrations de Plemelj et Birkhoff (en 1913). Cependant,il y a une dizaine d'année elles furent remise en question et récemment le mathématicien russe A. Bolibruch a mis à nu une série de contre-exemples dont nous présenterons le plus simple.

Nous verrons en fait de ceux-ci sont très fins car le résultat est presque toujours vrai.

1.3.2 L'étude locale

Revêtement universel

Définition 7 — *Revêtement Soit X, Y deux espaces topologiques. Un revêtement est une application continue de X dans Y telle que pour tout y de Y, il existe un voisinage V de y dans Y vérifiant: $\exists \alpha : f^{-1}(V) \to F$ (où F est un ensemble discret) avec $\left\{ \begin{array}{ccc} f^{-1}(V) & \to & V \times F \\ x & \rightarrowtail & (f(x), \alpha) \end{array} \right.$ qui est un homéomorphisme.*

Proposition 3 — *Revêtement universel Soit Y un espace topologique localement simplement connexe (cette hypothèse est toujours vérifiée dans le cas des variétés qui nous intéresse), il existe un espace topologique simplement connexe X tel qu'on puisse définir un revêtement de X dans Y (dit universel). On dira parfois par abus de langage que X est un revêtement universel de Y.*

Remarque 3 — Un revêtement universel d'une variété est une variété.
Exemple 3 — Le revêtement universel du cercle de centre 0 et de rayon 1 dans $\mathbb{C}$ est par exemple une hélice infinie dans l'espace au dessus du cercle avec la projection naturelle sur le cercle.
Remarque 4 —

(i). On a une détermination du log sur $\widetilde{\mathbb{C}^*}$

(ii). Les solutions de notre système sont dites multiformes, c'est à dire que ce sont des solutions sur $\widetilde{S^2\Sigma}$

Singularités régulières

Soit D un disque ouvert de centre 0 dans $\mathbb{C}$ et $D^* = D \backslash \{0\}$, et $\pi : \widetilde{D^*} \rightarrowtail D^*$ un revêtement universel de D^*. On choisit un logarithme sur $\widetilde{D^*}$, et on pose $z^M := e^{M.log(z)}$.

Définition 8 — *Soit f une fonction holomorphe sur $\widetilde{D^*}$, On dira qu'elle est à croissance polynômiale s'il existe un réel r qui vérifie:*

$$\lim_{z \to 0} z^{-r} f(s(z))) = 0$$

pour toute section locale s de π. Le plus grand entier ν tel que cela ait lieu pour tout $r < \nu$ s'appelle l'ordre de f en zéro, on le note $\nu(f)$

Exemple 4 — La fonction multiforme $z^\lambda (log(z))^k$ est à croissance polynômiale d'ordre $\lfloor \mathfrak{Re}(\lambda) \rfloor$.

Définition 9 — *On suppose que dans (1) A est holomorphe dans D^*. On dira alors que (1) a une singularité régulière en zéro si toutes ses solutions ont une croissance polynômiale.*

Proposition 4 — *Un pôle simple de A(z) est une singularité régulière:*

Démonstration. $|\|Y\|'| = |\frac{<Y',Y>}{\|Y\|}| \leqslant \|Y'\| \leqslant \|A(z).Y(z)\|$.

De plus A(z)=$\frac{A_0}{z} + B(z)$, avec B(z) holomorphe en zéro, donc majorée en norme par un réel m pour tout z dans une boule B(0,η) avec η suffisamment petit. Si de plus on note $a_0 = \|A_0\|$, on a alors:

$$pour |z| < \eta : |\|Y(z)\|'| \leqslant (\frac{a_0}{|z|} + m).\|Y(z)\|$$

Nous intégrons cette inégalité : $\|Y(z)\| \leqslant \|Y\|_{ini}.|z|^{-a_0} e^{m|z|}$ donc 0 est d'ordre au moins $-a_0$. ■

Remarque 5 — Un pôle d'ordre arbitrairement grand peut être une singularité régulière.

Retour au système différentiel

Choisissons une base S de l'espace des solutions de (1), nous notons Y(z) la matrice fondamentale des solutions, et M la matrice de monodromie autour de notre pôle. Soit L l'unique matrice carrée (q,q) de valeurs propres λ ($0 \leqslant \lambda < 1$) telle que $e^{2i\pi L}$=M. Comme $Y(z)z^{-L}$ est invariante par la monodromie (en effet elle devient $(Y(z)M).(e^{2i\pi}z)^{-L} = Y(z).MM^{-1}.z^{-L}$), on peut en déduire une application holomorphe de D^* dans $M_q(\mathbb{C})$ (elle est à priori multiforme sur D^*, mais en fait, comme elle est invariante par monodromie, elle a une unique détermination). Remarquons que (1) admet une singularité régulière en 0 si et seulement si Y(z).z^{-L} est méromorphe en zéro (en effet z^{-L} est à croissance polynômiale).

Proposition 5 — *Lorsque (1) admet une singularité régulière en 0, ses solutions sont des sommes de fonctions vectorielles du type $z^\lambda (log(z))^k \varphi(z)$ où $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et φ est holomorphe dans D*

Démonstration. Y(z)z^{-L} est méromorphe en 0. nous pouvons donc écrire chacune de ses colonnes sous la forme $\frac{\varphi(z)}{z^m}$. La multiplication par z^L donne la forme générale. ■

Supposons que (1) admette une singularité régulière en 0, posons F^ν(S):=$\{y \in S/\nu(y) \leqslant \nu\}$, c'est un espace vectoriel. Soit $\nu^1 \geqslant \cdots \geqslant \nu^q$ la suite des ordres des solutions de (1), c'est à dire les entiers ν tels que $F^\nu \neq F^{\nu+1}$, répétés avec mutiplicité dim($F^\nu / F^{\nu+1}$) et $y_1, \ldots, y_q$ une base de S telle que $\nu^i = \nu(y_i)$ en zéro.

Remarque 6 — Nous voyons que pour tout autre base (u_1, ...,u_q) dont les ordres sont croissants : $\nu(u_i) \leqslant \nu^i$

Proposition 6 — *F^ν est invariante par la monodromie M.*

Démonstration. Ceci est clair vu la forme des solutions car l'ordre de $z^\lambda (log(z))^k \varphi(z)$ est $\lfloor \mathfrak{Re}(\lambda) \rfloor$ et ne change pas par monodromie. ■

Proposition 7 — *La matrice de monodromie M est donc triangulaire supérieure dans une base du type précédent; cette base qui est dite adaptée à S en zéro*

Démonstration. Les F^ν forment un drapeau, donc on peut trigonaliser en respectant l'ordre des ν^i. ■

Proposition 8 — *Dans une base adaptée, Y(z)=V(z)$z^L z^N$ avec V(z) holomorphe et N=diag($\nu_1, \ldots, \nu_q$).*

Démonstration. $Y(z)z^{-L}$ est méromorphe, en multipliant par z^{-N}, la singularité disparaît. ■

1.3.3 Caractérisation d'un pôle simple

Théorème 2 — *Supposons que (1) ait une singularité régulière en 0. Soit $(y_1, \ldots, y_q)$=Y(z) une base adaptée de S. A a un pôle simple en 0 si et seulement si Y(z)= $V(z)z^N z^L$ où V est holomorphe et inversible dans D. On rappelle que $e^{2i\pi L} = M$ et N=diag($\nu_1, \ldots, \nu_q$).*

Démonstration. Si Y(z)=$V(z)z^N z^L$, on a $A(z) = Y'(z).Y(z)^{-1} = V'(z).V(z)^{-1} + \frac{1}{z}V(z).(N + z^N L z^{-N}).V(z)^{-1}$. Comme L est triangulaire supérieure, $z^N L z^{-N}$ est holomorphe (on a en effet que des termes du type $z^{\nu_i - \nu_j}$ avec $i \leqslant j$ donc $\nu_i \geqslant \nu_j$); A(z) a donc un pôle simple en 0. Nous admettrons la réciproque. ■

Corrolaire 1 — *Soit A_0 la matrice des résidus de A(z) en 0. Le nombre $Tr(A_0 - N - L)$ est un entier positif; il est nul si et seulement si A(z) a au plus un pôle simple à l'origine.*

Démonstration. Soit Y(z)=$V(z)z^N z^L$, une matrice fondamentale de solutions correspondant à une base adaptée de S.

$$\frac{d}{dz} logdetY(z) = \frac{d}{dz} logdetV(z) + \frac{TrN}{z} + \frac{TrL}{z}$$

Nous remarquons aussi en testant sur les matrices diagonales, puis par un raisonnement de densité que:

$$\frac{d}{dz} logdetY(z) = Tr(Y'(z)Y(z)^{-1}) = TrA(z)$$

l'examen du coefficient de $\frac{1}{z}$ donne $Tr(A_0 - N - L) = \nu(detV(z))$. ■

1.4 Un contre-exemple dans le cas des pôles simples

1.4.1 La difficulté pour en trouver

Si on reste proche de l'identité

Cette démonstration est due au mathématicien russe I. Lappo-Danilevskiĭ en 1928. Il décrit les solutions du système (1) explicitement grâce à des séries polylogarithmiques.

Si on suppose A méromorphe à n pôles simples et holomorphe à l'infini, le système s'écrit plus simplement:

$$A(z) = \sum_{\alpha \in \Sigma} \frac{A_\alpha}{z - \alpha} \tag{1.2}$$

où Σ est l'ensemble des n pôles de A et $\sum_{\alpha \in \Sigma} A_\alpha = 0$.

On note $\widetilde{U}$ le revêtement universel de $S^2 \backslash \Sigma$, et o son point base. Soit Σ^* l'ensemble des suites finies d'éléments de Σ. On définit alors par récurrence les fonctions L_σ sur $\widetilde{U}$, pour $\sigma \in \Sigma^*$, par:

(i). L_σ:= 1 si σ est vide,

(ii). Si $\sigma = \sigma'.\alpha$, on pose $L_\sigma(z) = \int_o^z \frac{L_{\sigma'}(u)}{u - \alpha}$du.

Pour $\sigma = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$, on pose $A_\sigma : = A_{\sigma_p} \ldots A_{\sigma_1}$. Alors

Proposition 9 —

$$Y(z) = \sum_{\sigma \in \Sigma^*} L_\sigma(z) A_\sigma$$

est une matrice fondamentale de solutions de (1).

Démonstration.

(i). On montre d'abord la convergence de la série:
$\exists$ M $\in I\!R$ tel que $\forall \alpha \in \Sigma, \|A_\alpha\| \leqslant M$; on a

$$\|Y(z)\| \leqslant \sum_{\sigma \in S(\Sigma)} |L_\sigma(z)| M^{|\sigma|} \leqslant \sum_{k \in \mathbb{N}} (\sum_{|\sigma|=k} L_\sigma(z)) M^k$$

Or nous avons par récurrence : $\forall z / |z| \leqslant min|\alpha|; |L_\sigma(z)| \leqslant 1$:

$$|L_\sigma(z)| \leqslant \frac{1}{|\alpha_p|} \int_0^z \frac{du}{1 - \frac{|u|}{|\alpha_p|}} \leqslant |log(1 - \frac{|z|}{|\alpha_p|})| \leqslant \frac{|z|}{|\alpha_p|} \leqslant 1$$

(ii). Elle vérifie la relation $Y'(z) = A(z)Y(z)$,

(iii). $Y(o) = I_q$.

■

On a donc pour $\alpha \in \Sigma$, la matrice de monodromie M_α est égale à $Y(o_\alpha)$ où o_α est le transformé dans $\widetilde{U}$ de o par $\gamma_\alpha \in \pi_1(S^2 \backslash \Sigma)$ qui est un tour autour de α.

Lorsque $\sigma = (\alpha)$, on a $L_\sigma(o_\beta) = L_\sigma(o) = O$ pour $\beta \neq \alpha$, et $L_\sigma(o_\alpha) = 2\pi i$. D'où

$$M_\alpha = I_q + 2\pi i A_\alpha + \sum_{Card(\sigma)>1} L_\sigma(o_\alpha) A_\alpha$$

On en déduit que l'application $A_\alpha \rightarrowtail M_\alpha$ est analytique, et que son application tangente à l'origine est inversible. Le théorème d'inversion locale nous permet donc de conclure:

Théorème 3 — *Les matrices M_α sont les matrices de monodromie d'un système à n pôles simples si elles sont suffisamment proches de l'identité.*

Si l'une des matrices est diagonalisable

C'est en fait la démonstration de Birkhoff que nous n'étudierons pas, mais nous retiendrons le fait que:

Théorème 4 — *Dès que une des matrices M_α est diagonalisable, alors le problème admet une solution, c'est à dire que il existe A avec n pôles simples telle que les M_α soient les matrices de monodromie associées.*

Si la représentation est irréductible

Récemment, Kostov et indépendamment Bolibruch ont démontré:

Théorème 5 — *Toute représentation irréductible de $\pi_1(S^2 \backslash \Sigma)$ est la représentation de monodromie d'un système à pôles simples.*

On déduit de cela que presque toutes les représentations sont la représentation de monodromie d'un système à pôles simples. En effet, il y a beaucoup de représentation irréductible. Plus précisément, on a:

Proposition 10 — *L'ensemble des représentations irréductibles contient un ouvert dense de l'ensemble des représentations dont le complémentaire est de mesure nulle dés que l'on a $n = Card(\Sigma) > 2$.*

1.4.2 Le contre-exemple

Rappel des notations

Le système étudié est à singularités régulières :

$$y'(z) = A(z)y(z)$$

où $A : z \mapsto A(z)$ est méromorphe sur S^2, et à pôles dans l'ensemble Σ. Pour $\alpha \in \sigma$, nous noterons $\nu_\alpha^1 \geqslant \cdots \geqslant \nu_\alpha^n$ la suite des ordres en α; N_α est la matrice $diag(\nu_\alpha^1, \ldots, \nu_\alpha^n)$. Après avoir choisi une base de S (l'espace vectoriel des solutions), nous notons M_α, la matrice de monodromie en α et L_α, la matrice L correspondante que nous avions vu dans l'étude locale.

Un théorème

Théorème 6 — *Soit $\rho : \pi_1(S^2\backslash\Sigma) \to Gl_q(\mathbb{C})$ une représentation satisfaisant les hypothèses suivantes :*

(i). ρ n'est pas irréductible

(ii). Chacune des matrices M_α a une seule valeur propre μ_α et un seul bloc de Jordan

(iii). $\prod_{\alpha\in\Sigma}\mu_\alpha \neq 1$

Alors ρ n'est pas isomorphe à la représentation de monodromie d'un système différentiel à pôles simples

Pour cela on utilise le corollaire de l'étude locale pour obtenir:

Lemme 1 — *On a $\sum_{\alpha\in\Sigma} Tr(N_\alpha + L_\alpha) \leqslant 0$; avec le cas d'égalité si et seulement si tous les pôles de $A(z)$ sont simples.*

Démonstration. On utilise le fait que $\sum_{\alpha\in\Sigma} A_\alpha = 0$ et on somme le résultat du corollaire établi dans l'étude locale.
■

On peut donc donner la démonstration du théorème:

Démonstration. On suppose par l'absurde que ρ s'identifie à la représentation de monodromie d'un système différentiel à pôles n simples du type (1). Soit S l'espace des solutions et $\overline{\text{S}}$ un sous-espace non trivial de S invariant par ρ, et p sa dimension (en effet ρ n'est pas irréductible par hypothèse).

Si on choisit une base de S où les p premiers vecteurs forment une base de $\overline{\text{S}}$, alors les matrices M_α s'écrivent:

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} \overline{M}_\alpha & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

La matrice fondamentale de solutions correspondante s'écrit sous la forme:

$$Y(z) = \begin{pmatrix} \overline{Y}(z) & * \\ U(z) & * \end{pmatrix}$$

La matrice $\begin{pmatrix} \overline{Y}(z) \\ U(z) \end{pmatrix}$ étant de rang p car Y est inversible admet p lignes linéairement indépendantes; en multipliant $Y(z)$ à gauche par une matrice de permutation, on peut supposer que $det\overline{Y}(z)$ n'est pas identiquement nulle. La matrice $\overline{Y}'(z)\overline{Y}(z)^{-1}$ est méromorphe sur le revêtement universel de $S^2\backslash\Sigma$, invariante par monodromie, et à croissance polynômiale aux points de Σ; elle provient donc d'une matrice $\overline{A}(z)$ méromorphe sur S^2. $\overline{Y}(z)$ est donc la matrice fondamentale de solutions du système différentiel

$$\overline{y}'(z) = \overline{A}(z)\overline{y}(z). \tag{1.3}$$

Ce système est à singularités régulières qui proviennent des points de Σ et de Σ', l'ensemble des zéros de $\det\overline{Y}(z)$. Cependant, aux points de Σ', les solutions sont holomorphes car $\overline{Y}(z)$ l'est. La monodromie est donc triviale, et les ordres sont positifs en ces points.

Soit $\alpha \in \Sigma$, la monodromie en α du système (3) et donnée par la matrice $\overline{M}_\alpha$, d'après la forme de M_α. Comparons les ordres de (3) en α à ceux de (1); soit $(y_1, \ldots, y_n)$, une base adaptée de S en α. Le sous-espace engendré pas $(y_1, \ldots, y_p)$ est $\overline{S}$. En effet, comme M_α a un unique bloc de Jordan, $\overline{S}$ est son unique sous-espace de dimension p stable. Or par définition de base adaptée, M_α y est trigonale. On obtient donc une base de solutions $(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_p)$ de (3) en supprimant les n-p dernières coordonnées des vecteurs $y_1, \ldots, y_p$. Remarquons enfin que $\nu_\alpha(\overline{(y)}_i) \geqslant \nu_\alpha(y_i) = \nu_a^i lpha$, ainsi les ordres de (3) en α vérifient (comme on l'avait noté dans l'étude locale):

$$\sum_{i=1}^p \overline{\nu}_\alpha^i \geqslant \sum_{i=1}^p \nu_\alpha(\overline{y}_i) \geqslant \sum_{i=1}^p \nu_\alpha^i$$

Comme la matrice M_α a une unique valeur propre μ_α, L_α a une unique valeur propre $\lambda = \frac{log\mu_\alpha}{2\pi i}$ (avec $0 \leqslant \Re(\lambda_\alpha) < 1$). Le lemme nous fournit donc la série d'inégalités suivante :

$$0 \geqslant \sum_{\alpha\in\Sigma}(\sum_{i=1}^p \overline{\nu}_\alpha^i + p\lambda_\alpha) + \sum_{1\leqslant i\leqslant n, \beta\in\Sigma'} \nu_\beta^i \geqslant \sum_{\alpha\in\Sigma}(\sum_{i=1}^p \nu_\alpha^i + p\lambda_\alpha) \geqslant \frac{p}{n}\sum_{\alpha\in\Sigma}(\sum_{i=1}^p \nu_\alpha^i + n\lambda_\alpha) = 0$$

La dernière inégalité exprime que la moyenne des $(\nu_\alpha^1, \ldots, \nu_\alpha^p)$ est supérieure à celle des $(\nu_\alpha^1, \ldots, \nu_\alpha^n)$ (on a $\nu_\alpha^1 \geqslant \cdots \geqslant \nu_\alpha^n$) On déduit alors que $\nu_\alpha^1 = \cdots = \nu_\alpha^n$, pour tout $\alpha \in \Sigma$, et $\sum_{\alpha\in\Sigma}(\nu_\alpha^1 + \lambda_\alpha) = 0$. En prenant l'exponentielle, il vient $\prod_{\alpha\in\Sigma}\mu_\alpha = 1$, ce qui contredit la dernière hypothèse.

■

Exemple 6 — Les hypothèses du théorème imposent : n $\geqslant 4$

Les trois matrices suivantes conviennent :

$$M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} M_\beta = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ -4 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix} M_\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

En effet $M_\alpha M_\beta M_\gamma$=I.On voit trivialement que ces matrices n'ont qu'une seule valeur propre (1;1 et -1) ; elles n'ont qu'un seul bloc de Jordan. Ainsi, la représentation de $\pi_1(S^2\backslash\{a,b,c\})$ définie par ces trois matrices ne peut être réalisée comme représentation de monodromie d'un système différentiel a pôles simples.

1.5 Conclusion

Le "théorème" de Birkhoff reste vrai dans le cas générique (presque toute représentation est irréductible et toute matrice, diagonalisable sur $\mathbb{C}$). C'est de là que provient la difficulté à trouver un contre-exemple. On notera tout de même qu'un théorème avec des contre-exemples est resté vrai pendant près de 80 ans. Ceci illustre à quel point les mathématiques sont un art difficile, même les meilleurs peuvent se tromper, et une erreur peut mettre très longtemps à être corrigée.

Bibliographie

[1] Arnaud Beauville ; *Monodromie des systèmes différentiels linéaires à pôles simples sur la sphère de Riemann* ; Séminaire N. Bourbaki, mars 1993

[2] A.A. Bolibruch ; *Fuchian System with reductible monodromy and the Riemann-Hilbert problem* ; L.N.M. 1520

[3] Henri Cartan ; *Théorie Élémentaire des fonctions analytiques d'une ou de plusieurs variables complexes* ; Herman, 1977

[4] Claude Godbillon ; *Groupe fondamental et Revêtements*, 1969

[5] R. et A. Douady ; *Algèbres et Théories Galoisiennes*; Nathan, 1969

Fiche d'exposé distribuée en Russie, dans le cadre d'un groupe de travail lors du voyage en Russie de deuxième année

Chapitre 2

Ekeland's Theorem

2.1 Notations

lets denote :

- (E, d), any complete metric space.
- H, any Hilbert space.
- B, any Banach space.
- X, any smooth Banach space : X is a Banach space where there exist $\varphi : X \mapsto \mathbb{R}^+$ such that $\Delta = \{x, \varphi(x) > 0\}$ is a bounded non empty set on which φ is Fréchet differentiable.
- if $f : E \mapsto \mathbb{R}$, then $Epi(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}, t \geqslant f(x)\}$
- $\mathcal{C}((x_0, t_0), \alpha)$, the lower cone of vertex (x_0, t_0) and parameter α in $E \times \mathbb{R}$:

$$\mathcal{C}((x_0, t_0), \alpha) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}, |t - t_0| \leqslant \alpha d(x, x_0)\}$$

2.2 The Theorem

Théorème 1 — *Let f be a lower semicontinuous function, with a lower bound L, from E onto $\mathbb{R}$. Then $\forall x \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \exists \overline{x} \in E$ with the two following properties :*

- $d(x, \overline{x}) \leqslant \frac{\lambda}{\varepsilon}$
- $\mathcal{C}((\overline{x}, f(\overline{x}), \varepsilon) \cap Epi(f) = \{(\overline{x}, f(\overline{x}))\}$

where $\lambda = f(x) - Inf(f)$

It is a basic application of the decreasing compact sequence theorem in complete metric spaces (if $\alpha > 0$, then $\mathcal{C}(y, f(y)) \cap Epi(f)$ is a compact non empty set $\forall y \in E$).

2.3 First results

- a demonstration of Picard-Banach fixed point theorem
- Caristi's theorem (1976)

2.4 Fréchet Differentiability of convex functions of Hilbert spaces

Théorème 2 — *If f is a continuous convex function from H onto $\mathbb{R}$, then it is Fréchet differentiable anywhere on a generic set G.*

let :

- $\mathcal{M} = \{(u, a) \in H \times \mathbb{R}, f(x) \geqslant a - (u|x), \forall x \in H\}$

- $\mathcal{U}(x,c) = \{u \in H, \exists a \in \mathbb{R} : (u,a) \in \mathcal{M} \text{ and } a - (u|x) \geqslant f(x) - c\}$
- $P_\varepsilon = \{x \in H, \exists v \in H, \exists \eta > 0 : \; \|y - x\| \leqslant \eta \Rightarrow f(y) \leqslant f(x) - (v|y - x) + \varepsilon \|y - x\|\}$
- $\Lambda_c = \{(u_i, m_i) \in \mathcal{M} \text{ and } m_1 - (x_i|x) \leqslant f(x) - c\}$
- $G_\varepsilon = \{x \in H : \exists c > 0, diam(proj_H(\Lambda_c)) \leqslant \varepsilon\}$

Then the proof works with following steps :

- $\forall x \in H, c > 0, \mathcal{U}(x,c)$ is bounded
- $\forall \varepsilon > 0$, P_ε is dense into H
- if $x \in \bigcap_{\varepsilon > 0} G_\varepsilon$, then f is Fréchet differentiable at x.
- $\forall \varepsilon > 0$, G_ε is an open set
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \varepsilon' > 0$, $P_{\varepsilon'} \subset G_\varepsilon$
- by Baire's dense open set theorem, this theorem follows.

Remarque 1 — This theorem can be generalized in smooth Banach spaces. For example if B is reflexive or B^* separable, then it is smooth (l^1,l^∞).

Article en cours de rédaction sous la direction conjointe de François Baccelli, David Ross McDonald

Chapitre 3

Mean-field model for TCP connections through a RED buffer

August 2001 abstract : Active queue management schemes like RED (Random Early Detection) have been suggested when multiple TCP sessions are multiplexed through a bottleneck buffer. The idea is to detect congestion before the buffer overflows and packets are lost. When the queue length reaches a certain threshold RED schemes drop/mark incoming packets with a probability that increases as the queue size increases. The objective is an equitable distribution of packet loss and improved network utilization.

The window sizes and slow start thresholds of each TCP session evolves like independent dynamical systems coupled by the RED mechanism. Here we introduce a mean-field approximation to one such RED system as the number of flows tends to infinity. The deterministic limiting system is described by a transport equation. The numerical solution of the limiting system is found to provide a good description of the of the evolution of the distribution of the window sizes, the average queue size, the average loss rate per connection and the total throughput.

TCP with RED or tail-drop may exhibit limit cycles and this causes unnecessary packet delay variation and variable loss rates. The root cause of these limit cycles is the hysteresis due to the round trip time delay in reacting to a packet loss. We also investigate an algorithm where a server marks packets from a source suffering a packet loss as ghosts for one round trip time. New packets from a ghost source may still be dropped but only at half the going rate. This algorithm has the effect of eliminating the delayed reaction to packet loss and thereby eliminates limit cycles. *Key words and phrases*: TCP, RED, mean-field, dynamical systems.

AMS 1980 subject classifications: Primary ???; Secondary ???.

3.1 Introduction

We will assume that N TCP/IP connections implementing TCP Reno with fast recovery and fast retransmit are routed through a bottleneck queue in a router. Hence each of the connections implements a window flow control which limits the number of packets from this connection allowed into the network during one Round Trip Time (RTT). We imagine the source writes its current window size in each packet it sends and we define $W_n(t)$ to be the window size written in a packet from connection n arriving at the server at time t. Let $\mathbf{W}(t) = (W_1(t), \cdots, W_N(t))$ represent the state of all connections at time t.

We assume the link rate of the router is NL packets per second. We assume the packets from all connections join the queue at the bottleneck buffer and we denote by $Q_N(t)$ the average queue per flow so the length of the queue at time t is $NQ_N(t)$. Let $RTT_n(t)$ be the past round trip which could have been written into the cell currently arriving at the server at time t from connection n. $RTT_n(t)$ is the sum of the transmission delay plus the queueing delay of cells from connection n.

Under TCP Reno established connections execute congestion avoidance where the window size of each connection increases by one packet each time a packet makes a round trip, i.e. each RTT_n as long as no losses or time-outs occur. During this phase the rate the window of connection n increases is approximately $1/RTT_n$ packets per second. The only thing restraining the growth of transmission rates is a loss or time-out. We will assume that the transmission delay plus the delay across a full buffer will not cause a timeout and there are no transmission losses. Hence the only losses or explicit congestion notification (ECN) are generated by active buffer management or by tail-drop. When a loss or ECN occurs the window is reduced by half.

A connection executes slow-start when started or when a connection recovers from a timeout otherwise it will remain in the congestion avoidance phase. A timeout can only occur if a packet loss occurs when the window size is less than 4 so the fast recovery/retransmit feature can't work. With ECN a timeout can only occur if the buffer is so overloaded that even retransmitted packets are lost. Although the proportion of connections in timeout is an important performance measure we will assume that there is enough buffer space to avoid timeouts so we will ignore connections in slow-start.

We will assume the buffer has size NB packets and that once this buffer space is exhausted arriving packets are dropped. Such tail-drop buffering scheme does stabilize the system but it may cause inordinately large packet delays. To solve these problems Random Early Detection (RED) schemes have been proposed where an arriving packet is killed with a probability which increases with the queue size. The original RED scheme (see ([])) proposed a linear increase in loss rate from 0 at queue size q_{min} to p_{max} at q_{max} and 1 for a queue size greater than q_{max}. Here we take the loss probability (of an incoming packet before being processed) to be of the form $F(Q_N(t))$ and F is a distribution function which is zero below some threshold (and we always assume $F(0) = 0$) but rises to 1 when $Q_N(t)$ reaches B. Of course the tail-drop scheme can be considered as the limiting case when if $F(q) = 0$ for $q < B$ and $F(q) = 1$ for $q \geqslant B$.

Since incipient congestion is detected early causing some connections to reduce their transmission rate (due to a packet loss) long before buffer overflow one hopes there will be a high utilization of the network with an equitable distribution of packet loss since those connections with large windows have a higher chance of incurring losses. The best F would minimize the dispersion of the window sizes and eliminate oscillations of the queue length (thus reducing packet delay variation). Competing RED schemes have been suggested in [2] and [4].

There is a delay of one round trip time between the time the packet is killed and the time when the buffer receives the reduced rate. During this delay time packets continue to arrive at the old rate. This has been seen ([], []) to result in hysterisis effects that includes buffer oscillations. These oscillations appear as limit cycles in our theoretical model. We ignore other causes of hysterisis like the discrete time between updates of $F(Q_N(t)$ or worse, a moving average estimate of the current queue size.

We assume window reductions at connection n occur according to a Poisson process with intensity

$$\frac{W_n(t - RTT_n(t))}{RTT_n(t)} F(Q_N(t - RTT_n(t)))$$

(We can assume $W_n(t) = 0$ for $t < 0$). This makes the loss rate proportional to the transmission rate one $RTT_n(t)$ in the past multiplied by the RED loss rate one RTT_n in the past and thus imitates the discrete system. In fact the delay in reducing the window size means the chance that this connection loses another packet remains two times too high during the delay period until the loss takes effect. To avoid this effect a better (but perhaps impractical) RED algorithm (see also [**?**]) would mark the incoming window of $W_n(t)$ packets as ghosts (i.e. mark all packets from this connection until the retransmission of the lost packet). These ghosts could still be killed but only at half the going rate to compensate for the delay. We will investigate the effect of implementing this policy .

3.2 The N-particle system and mean-field limit

3.2.1 The N-Particle Markov process

It is easier to approximate the above dynamical system by a fluid model. Let the queue be a fluid and to allow the windows and thresholds to evolve as a differential system. We assume packets have equal sizes of 1 data unit. Let $\{N_n(t); n = 1, \ldots, N\}$ be N independent Poisson processes with intensity 1 and let

$$\Lambda_n(t) = \int_0^t \frac{W_n(s - RTT_n(s))}{RTT_n(s)} F(Q_N(s - RTT_n(s)))ds$$

be the compensator for the Poisson point process of losses of connection n. Hence the losses of connection n occur according to the time changed Poisson process $N_n(\Lambda_n(t))$.

When no loss occurs the window size increases linearly at rate $1/RTT_n(t)$; i.e. add approximately $1/W_n(t - RTT_n(t))$ each time an acknowledgement returns to the source. But when a packet was lost at time $t - RTT_n(t)$, the source does not increase the window size this amount since no acknowledgement returns. Hence the rate of increase of the window size in data units is given by

$$\frac{dt}{RTT_n(t)} - \frac{1}{W_n(t - RTT_n(t))} dN_n(\Lambda_n(t)).$$

The evolution of the window size is described by the following stochastic differential equation:

$$dW_n(t) \quad = \quad \frac{1}{RTT_n(t)} dt - \left(\frac{1}{W_n(t - RTT_n(t))} + W_n(t)/2 \right) dN_n(\Lambda_n(t)) \tag{3.2.1}$$

with $W_n(0) = w_n(0)$, $n = 1, \ldots, N$ specified.

When there are no losses, the rate at which source n pours fluid into the buffer is $W_n(t)/RTT_n(t)$. A loss at time $t - RTT_n(t)$ means the source stops sending packets until $W_n(t)/2$ packets are acknowledged, i.e. until the window size has been reduced by half. As far as the queue is concerned, it sees an arrival rate of $W_n(t)/RTT_n(t)$ for roughly half an RTT since packets in the system continue to arrive at the old rate. This is followed by a zero arrival rate for the remaining half of the RTT. Hence the average arrival rate for an RTT following a loss is $W_n(t)/(2RTT_n(t))$. We will approximate the real system by saying the arrival rate is the window size divided by the RTT. Since the window size is halved when a loss is detected this means the arrival rate in our model over the RTT following a loss is $W_n(t)/(2RTT_n(t))$, i.e. equal to that of the real system. Hence the rate of change of the fluid buffer is given by

$$N\frac{dQ_N(t)}{dt} = \sum_{n=1}^{N} \frac{W_n(t)}{RTT_n(t)}(1 - F(Q_N(t))) - NL + \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{W_n(t)}{RTT_n(t)} - NL\right)^{-} \chi\{Q_N(t) = 0\}$$

since the proportion $F(Q_N(t))$ of the fluid is lost. The second term prevents the queue size from becoming negative. In effect the queue can stick at 0 until a sufficient number of connections increase their window size. Dividing by N gives

$$\frac{dQ_N(t)}{dt} = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{W_n(t)}{RTT_n(t)}(1 - F(Q_N(t)) - L + \left(\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \frac{W_n(t)(1 - F(Q_N(t))}{RTT_n(t)} - L\right)^{-} \chi\{Q_N(t) = 0\} \quad (3.2.2)$$

with $Q_N(0) = q(0)$.

3.2.2 Reformulation in terms of a measure-valued process

At this point we make the simplifying assumption that all our connections have a constant round trip time r. This is clearly false since the RTT of each connection depends on the transmission time and increases as the buffer becomes congested. In fact, as a rough approximation, the RTT should satisfy $RTT_n(t) = T_n + Q_N(t - RTT_n(t))/L$ where T_n is the transmission delay from source n to the server and back. Nevertheless, for larger link rates the queueing time will be insignificant.

In order to study the limiting behavior of the system (3.2.1), (3.2.2) as the number of connections N goes to infinity we reformulate the system in terms of its empirical process (see Dawson [3]). For any Borel set $A \subset \hat{S}$ define

$$M_N(t, A) : = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_A(W_n(t)) \quad (3.2.3)$$

to be the associated probability-measure-valued process. The process $M_N(t) \equiv M_N(t, \cdot)$ belongs to the state space $M_1(R^+)$, the set of probability measures on $R_+ = [0, \infty)$ furnished with the topology of weak convergence. Given an initial distribution $\mu(A) = \sum_{n=1}^{N} \chi_A(w_n(0))$ in $M_1(R_+)$ and an initial value of $Q_N(0) = q(0)$ specifies the canonical process (M, Q) with marginals $(M_N(t, \cdot), Q_N(t))$ on the set of trajectories $\Omega = C([0, \infty), M_1(R_+) \times R_+)$, the space of continuous functions from $[0, \infty)$ into $M_1(R_+) \times R_+$. Let $P_{\mu,q(0)}$ denote the induced probability measure on Ω.

Since the dynamical systems specified by (3.2.1), (3.2.2) are exchangeable in the $W_n(t)$ (we can relabel the connections without changing the evolution of the system) it follows that (3.2.1), (3.2.2) can be reformulated in terms of $(M_N(t), Q_N(t))$. The dynamics of $M_N(t)$ are described through a set of equations satisfied by the scalar product

$$\langle g, M_N(t)\rangle = \int_0^\infty g(w) M_N(dw)$$

where $g \in \mathcal{G}$ and $\mathcal{G} = \{g \in C_b^1(R_+) : g(0) = 0, g'(0) = 0\}$ in the space of bounded functions with bounded derivatives. $\mathcal{G}$ is chosen to avoid singular behaviour associated with connections disappearing from the system. A more general model would allow a sticky boundary at 0 corresponding to time-outs.

Reformulating (3.2.2) we get

$$\begin{aligned} &Q_N(t) - Q_N(0) \\ &= \int_0^t \left[\langle w, M_N(t)\rangle \frac{(1 - F(Q_N(s))}{r} - L + \left(\langle w, M_N(s)\rangle \frac{1}{r} - L\right)^{-} \chi\{Q_N(s) = 0\}\right] ds \\ &= \int_0^t \left[\langle w, M_N(t)\rangle (ds - dK_N(s)) - Lds + \left(\langle w, M_N(s)\rangle \frac{1}{r}(ds - dK_N(s)) - L\right)^{-} \chi\{Q_N(s) = 0\}\right] ds \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

where $K_N(t) = \int_0^t F(Q_N(s))ds$ is the cumulative loss or kill rate.

We can also reformulate (3.2.1):

$$
\begin{aligned}
&\langle g, M_N(t)\rangle - \langle g, M_N(0)\rangle \\
= \;& \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^t \left[\frac{dg}{dw}(W_n(s))\frac{1}{r}ds + \left(-\frac{dg}{dw}(W_n(s))\frac{1}{W_n(s-r)} + g(W_n(s)/2) - g(W_n(s))\right) dN_n(\Lambda_n(s))\right] \\
= \;& \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^t \frac{dg(W_n(s))}{dw}\frac{1}{r}ds \\
+ \;& \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^t \left[\left(-\frac{dg}{dw}(W_n(s))\frac{1}{W_n(s-r)} + (g(W_n(s)/2) - g(W_n(s)))\right)\frac{W_n(s-r)}{r}F(Q_N(s-r))ds\right] \\
+ \;& E_n^1(t)
\end{aligned}
$$

where the asymptotically small error $E_n^1(t)$ is given by

$$
E_n^1(t) \quad = \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^t \left(-\frac{dg}{dw}(W_n(s))\frac{1}{W_n(s-r)} + g(W_n(s)/2) - g(W_n(s))\right) Z_N(ds)
$$

where

$$
Z_n(t) - Z_n(0) : = \int_0^t (dN_n(\Lambda_n^*(s)) - \frac{W_n(s-r)}{r}F(Q_N(s-r))ds).
$$

Consequently, if we let

$$
E\left(W_n(s-r)|W_n(s), Q_N(s-r)\right)) = \Delta(W_n(s), Q_N(s-r))
$$

then

$$
\begin{aligned}
&\langle g, M_N(t)\rangle - \langle g, M_N(0)\rangle \\
= \;& \int_0^t \left[\frac{1}{r}(1 - F(Q_N(s-r))\langle\frac{dg(w)}{dw}, M_N(s)\rangle ds + \langle (g(w/2) - g(w))\Delta(w, Q_N(s-r)), M_N(s)\rangle \frac{1}{r}F(Q_N(s-r))ds\right] \\
+ \;& E_n^1(t) + E_n^2(t) \\
= \;& \int_0^t \left[\frac{1}{r}(1 - F(Q_N(s-r))\langle\frac{dg(w)}{dw}, M_N(s)\rangle ds + \langle (g(w/2) - g(w))\Delta(w, Q_N(s-r)), M_N(s)\rangle \frac{1}{r}dK_n(s-r)\right] \qquad (3.2.5) \\
+ \;& E_n^1(t) + E_n^2(t)
\end{aligned}
$$

where $E_n^2(t)$ is given by

$$
E_n^2(t) \quad = \quad \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\int_0^t (g(W_n(s)/2) - g(W_n(s))\left[W_n(s-r) - E\left(W_n(s-r)|W_n(s), Q_N(s-r)\right)\right]\frac{1}{r}F(Q_N(s-r))ds.
$$

This error is asymptotically small since

$$
E(g(W_n(s)/2) - g(W_n(s))\left[W_n(s-r) - E\left(W_n(s-r)|W_n(s), Q_N(s-r)\right)\right] = 0.
$$

3.2.3 The mean-field evolution equations

As the number of connections N becomes large a remarkable simplification occurs essentially because of the law of large numbers. The limiting distribution of the window sizes evolves in a deterministic manner and hence so does the queue size. We approximate $\Delta(w, Q_N(s-r))$ by w; that is

$$
E\left(W_n(s-r)|W_n(s), Q_N(s-r)\right) \approx W_n(s).
$$

The following theorem is proved in the Appendix.

Theorem 1. *Suppose that as $N \to \infty$, $\mu_N = M_N(0)$ converges weakly to some $\mu(0) \in M_1(R^+)$ and $Q_N(0)$ converges to $q(0)$. Then $M_N(t) \to \mu(t)$ and $Q_N(t) \to q(t)$ where $\mu(t)$ and $q(t)$ are continuous functions of $t \in R^+$ into $M_1(R+)$ and R^+ respectively. Moreover, for any function $g \in \mathcal{G}$,*

$$
\begin{aligned}
&\langle g, \mu(t)\rangle - \langle g, \mu(0)\rangle \\
= \;& \int_0^t \left[\frac{1}{r}(1 - F(Q(s-r)))\langle\frac{dg(w)}{dw}, \mu(s)\rangle + (\langle g(w/2)w, \mu(s)\rangle - \langle g(w)w), \mu(s)\rangle)\frac{1}{r}F(Q(s-r))\right] ds \qquad (3.2.6) \\
& \qquad (3.2.7)
\end{aligned}
$$

and

$$\begin{aligned} & q(t)-q(0) \\ = & \int_0^t \left[\langle w,\mu(s)\rangle \frac{1}{r}(1-F(Q(s)))-L+\left(\langle w,\mu(s)\rangle \frac{1}{r}-L\right)^{-}\chi\{q(s)=0\}\right] ds \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Theorem 2. *The limit process evolution is given by the following equations :*

$$\frac{\partial p(t,w)}{\partial t} = \left(p(t,2w)\frac{2w}{r}2-p(t,w)\frac{w}{r}\right)F(Q(t-r))-\frac{1}{r}(1-F(Q(t-r)))\frac{\partial p(t,w)}{\partial w} \tag{3.2.9}$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = \int_w \frac{w}{r}p(t,w)dw(1-F(Q(t)))-L-\left(\int_w \frac{w}{r}p(t,w)dw-L\right)^{-}\chi\{q=0\}). \tag{3.2.10}$$

Proof If the initial distribution μ has a continuous density then $\mu(t)$ has a continuous density $p(t,w)$ differentiable in t which satisfies

$$\begin{aligned} & \int_w (p(t,w)-p(0,w))g(w)dw \\ = & \int_{s=0}^t \int_w p(s,w)\left((g(w/2)-g(w))\frac{w}{r}F(Q(s-r))+\frac{1}{r}(1-F(Q(s-r)))\frac{dg}{dw}\right)dwds \\ = & \int_w g(w)\left(\int_{s=0}^t \left(p(s,2w)\frac{2w}{r}2dw-p(s,w)\frac{w}{r}\right)F(Q(s-r))ds\right)dw \\ & -\int_w g(w)\left(\int_{s=0}^t \frac{1}{r}(1-F(Q(s-r)))\frac{\partial p(s,w)}{\partial w}\right)dw \end{aligned}$$

and

$$q(t)-q(0)=\int_{s=0}^t \left(\int_w p(s,w)\frac{w}{r}F(Q(s))-L+\left(\int_w p(s,w)\frac{w}{r}F(Q(s))-L\right)^{-}\chi\{q(t)=0\})\right)ds.$$

Since g is arbitrary we have the Fokker-Planck equation of the theorem
We also have to check that this system determines a unique trajectory, that's true because it has no singularity.

■

3.3 Analysis of a mean-field system

The system (3.2.10) can be solved numerically and it displays a whole range of behavior depending on the the function F and the parameters L and r. To simplify matters we will take $F(q)=0$ if $q<q_0$ and $F(q)=1$ if $q\geqslant q_0$. This covers the usual drop-tail case if $q_0=B$. We start by a case of stability for the first equation in Subsection 3.3.1 next, we look for fixed points in Subsection 3.3.2. In Subsection 3.3.3 we discuss a case where limit cycles are present.

3.3.1 Stability of 3.2.9 when F(q) is constant

In this section $F(q)=k$. With nothing else the system is not stable because of the second equation, we must avoid infinite and empty queues. But this problem will be solved after the study of fixed point : there is a unique value of k stabilizing the queue size (given by 3.3.14), if k is greater, the queue empties, if it is lower, it increases to infinity.

Theorem 3. *If F(q) = k then for any initial distribution the window distribution stabilizes to a unique steady state distribution f (function of k).*

First we prove a lemma about the moments of our limit distribution p. But in what follows, we will only use the fact that the first moment, $M_1=E(p)$ is bounded.

Lemma 1. *$M_m(t)$ be the m^{th} w-moment of $p(t,w)$, Then $(M_m(t))_{\forall m\in\mathcal{N})}$ are bounded when t varies.*

Proof see Appendix B

■

Proof of the theorem The idea is that we take an infinite number of connections (countable) then they become independent. So the low of large numbers says that the distribution converges in low, hence weakly.

- We first prove the independency of the connections : they follow uniform independent Markovian processes (since F(q(t-r))=F(q(t))=k).

- Secondly, the chain is non-reductible, so all the connexions have the same law.
- So if we prove that $E(|W|)$ is bounded, the basic law of large number would finish our proof, moreover, the propagation of chaos will be proved :
  in fact we already have proved it, if $E(W)$ would not be bounded then $E(\frac{W_1+\cdots+W_n}{n})$ would not be finite, but if n is large enough the trajectory is almost surely like the deterministic limit one given by 3.2.9 and 3.2.10. But that fact is not possible since we proved $M_1 = E(p)$ is bounded (Lemma 1).
- Now we can apply the law of large numbers and :

$$\frac{W_1 + \cdots + W_n}{n} \rightharpoondown W_1 \sim_p f$$

■

Corollary 1. *Propagation of chaos : The law of the window size is given by f (the fixed distribution), this result remains fully true even if we consider the evolution of N connections with no approximation !.*

Remark 1. *That means that TCP-Reno is fair, and that the f we found is not only a mathematical limit, but something intrinsical to TCP-Reno in congestion avoidance with a loss rate of k .*

3.3.2 Fixed points of the mean-field equations

F(Q(t)) stabilizes at k. In this case (3.2.9) and (3.2.10) become :

$$(1-k)\frac{df(w)}{dw} = wk\,(4f(2w) - f(w)) \tag{3.3.11}$$

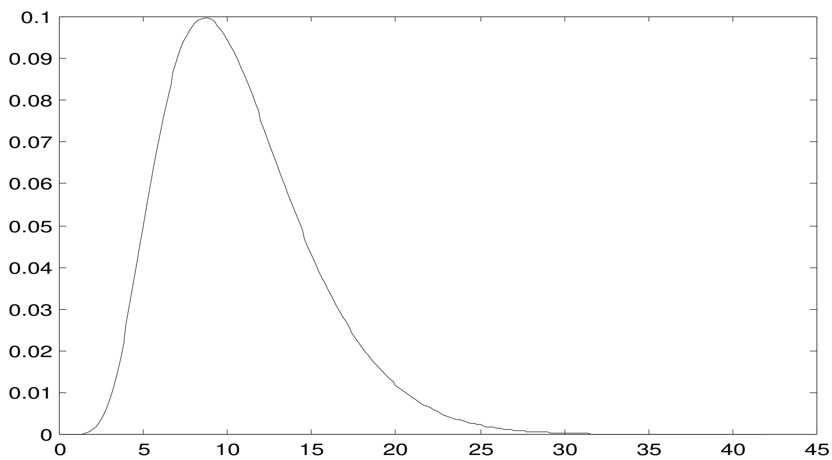
$$L = (1-k)\frac{1}{r}\int_w wf(w)dw. \tag{3.3.12}$$

(3.3.12) is simply Little's formula since the right hand side represents the throughput as the average window size divided by the RTT times the proportion of cells that are not killed.

Theorem 4. *Let $\Psi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{\prod_{j=1}^{i}(1-4^j)}$ ($\Psi \approx 0.4194$), The unique density $f(w)$ solving (3.3.11) is given by*

$$f(w) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \exp(-\frac{k}{1-k}4^i\frac{w^2}{2})$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{1}{\Psi}}\sqrt{\frac{k}{1-k}}\ ;\ a_i = a_{i-1}\frac{4}{1-4^i} = a_0\frac{4^i}{\prod_{j=1}^{i}(1-4^j)}. \tag{3.3.13}$$



Proof

- The fact that the f we give is a solution is a simple calculation, there are no convergency problems because all in normally convergent. The only point to elucidate is why f is a positive function : depending on the value of w, the module of the series general term decreases from the second or the first term. Like the sign is alternated, $f(w) \geqslant min(f_2(w), f_4(w)) \geqslant 0$, where $f_i(w)$ is the truncated series of f at term i.

- For the uniqueness, we saw that there was a unique function f in the case where k is fixed to which the system tended. If we take a solution of 3.3.11, there is no evolution, so it is f.
- The value of a_0 is determined by the requirement that f be a density.

$$\begin{aligned}
1 &= \int_0^\infty f(w)ds = \sum_{i=0}^\infty a_i \int_0^\infty e^{-\frac{k}{1-k}\frac{w^2}{2}4^i} dw \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}\sum_{i=0}^\infty a_0 \frac{4^i}{\prod_{j=1}^i (1-4^j)}\sqrt{\frac{1-k}{k4^i}} \\
&= \frac{\sqrt{1-k}}{\sqrt{k}} a_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{i=0}^\infty \frac{2^i}{\prod_{j=1}^i (1-4^j)}
\end{aligned}$$

This solution was obtained in the paper by Adjih, Jacquet and Vvedenskaya [1] and independently by Francois Baccelli.

- There always exists a unique solution to both (3.3.11) and (3.3.12). First note that

$$\begin{aligned}
\int_w wf(w)dw &= \sum_{i=0}^\infty a_i \int_0^\infty w \exp(-\frac{k}{1-k}4^i \frac{w^2}{2})dw \\
&= \sum_{i=0}^\infty a_i \frac{1-k}{k4^i} \\
&= \frac{1-k}{k} a_0 \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{\prod_{j=1}^i (1-4^j)} \\
&= \frac{1-k}{k} a_0 \xi
\end{aligned}$$

where $\xi = \sum_{i=0}^\infty \frac{1}{\prod_{j=1}^i (1-4^j)}$ ($\xi \approx 0.6885$).

It follows from (3.3.12) that

$$L = \frac{(1-k)}{r} a_0 \xi \frac{1-k}{k} = \frac{(1-k)^2}{r}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\Psi}\sqrt{k}\frac{\xi}{k}$$

by substituting a_0 given at (3.3.13). Hence we get

$$\frac{(1-k)^4}{k} = (rL)^2 \alpha \text{ where } \alpha = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\Psi}{\xi}\right)^2. \tag{3.3.14}$$

The function $(1-k)^4/k$ is monotonically decreasing. It follows that there is a unique point k satisfying (3.3.14).

■

Theorem 5. *f and all its derivatives are 0 for $t = 0$ and tend hyper-exponentially to 0 when $t \to \infty$*

Proof We can use induction to show $\sum_{i=0}^N a_i = \frac{a_0}{\prod_{j=1}^N (1-4^j)}$. For N=0, the formula is true and if it is true for N, then $\sum_{i=0}^{N+1} a_i = \frac{a_0}{\prod_{j=1}^N (1-4^i)} + a_{N+1} = \frac{a_0}{\prod_{j=1}^N (1-4^j)}(1 + \frac{4^{N+1}}{1-4^{N+1}}) = \frac{a_0}{\prod_{j=1}^{N+1} (1-4^j)}$, so it is true for $N+1$. Since $f(0) = \sum_{i=0}^\infty a_i$ it follows that $f(0) = 0$. Now differentiate (3.3.11) n times, and let $w \to 0$. The left hand side gives the $(n+1)^{th}$ derivative of f while the right hand side gives a sum of products with w and lower order derivatives of f. Since $f(0) = 0$ we have $f^{(n)}(0) = 0$ by induction.

■

3.3.3 Limit cycles of the mean-field equations

3.4 comparison with OPNET Modeler

in this section, we furnish some comparisons between the deterministic solution given by our equations and OPNET Modeler simulation, in the case if RED, and Tail Drop.

3.4.1 Warning

In the real word fast retransmit needs a widow sizes greater than 3 to work. Like we do not model timeouts (all the more because we want to avoid them), we will never compare our simulations with OPNET's in the case the mean window in less than 3. That means that we impose $Lr > 3$ (we remind the reader of that L is the mean bandwidth per connection).
In case the network is very busy, a solution to avoid timeouts is to increase the RTT, that can be made by increasing the queuing delay (but it's a bad solution), or by enhancing TCP for the server with a virtual transmission delay (that's it's own interest to avoid timeouts).

3.4.2 Limit cycles

3.4.3 stabilization

3.5 Appendix

A : Mean-field stochastic differential equations

B : Bound for p w-moments

First let's establish the equations on r and M_m, in (3.2.9), we multiply by rw^m, and we integrate on w :

$$r\frac{\partial}{\partial t}\int_{w>0} w^m p(t,w,q)dw = 4k\int_{w>0} w^{m+1}p(t,2w,q)dw - kM_{m+1} - (1-k)\int_{w>0} w^m \frac{\partial p}{\partial w}(t,w,q)dw$$

We can exchange the partial differential and the integral symbol in the first expression, we get $\frac{\partial M_m}{\partial t}$, in the second, the change $u = 2w$ gives $4k/2^{m+2}M_{m+1}$, and in the last one a piecewise integration where we differentiate w^m gives $+mM_{m-1}$ (note p decreases exponentially fast). Let's denote by $\dot{}$ the derivation by t, finally:

$$r\dot{M}_m = k(\frac{1}{2^m} - 1)M_{m+1} + (1-k)mM_{m-1} \tag{3.5.15}$$

From (3.2.10) we also get

$$0 = \frac{1-k}{r}M_1 - L \tag{3.5.16}$$

Now in $3.5.15_m$, if we apply the Jensen inequality with the convex function $u \mapsto u^{(m+1)/m}$ to M_{m+1}, then :

$$r\dot{M}_m \leqslant k(1 - \frac{1}{2^m})M_m^{(m+1)/m} + (1-k)mM_{m-1}$$

For $m = 1$, if $M_1 \geqslant \sqrt{2(1-k)/k}$ then $\dot{M}_1 \leqslant 0$ ($r \geqslant d > 0$), and it decreases. So $\overline{lim}_{t\to\infty}(M_1(t)) \leqslant \sqrt{2(1-k)/k} = M_1^{Max}$. By induction :

$$\overline{lim}(M_{m-1}) \leqslant M_m^{Max} \text{ with } M_m^{Max} = \Big(\frac{1-k}{k}\frac{m2^m}{2^m-1}M_{m-1}^{Max}\Big)^{\frac{m}{m+1}}. \tag{3.5.17}$$

In equation (3.5.16), by the same reasoning, if $r \geqslant (1-k)M_1^{Max}/L$ then it decreases.

$$\overline{lim}_{t\to\infty}r(t) \leqslant r^{Max} = \frac{1-k}{L}M_1^{Max} \tag{3.5.18}$$

Acknowledgements

Bibliographie

[1] Adjih, C., Jacquet, P., Vvedenskaya, N. (2001). Performance evaluation of a single queue under multi-user TCP/IP connections. *INRIA Research report #4141.*

[2] Aweya, J., Ouellette, M., Delfin, Y. M., Chapman, A. (2000). A load adaptive mechanism for buffer management. Nortel Networks Internal Report.

[3] Dawson, D. A. (1983). Critical Dynamics and Fluctuations for a Mean-Field model of cooperative behavior . *J. Statistical Phys.*, **31**, 29-85.

[4] Hollot, C.V., Misra, V., Towsley, D., Gong, W-B. (2001). A control theoretic analysis of RED. *To appear IEEE INFOCOM 2001*, 10 pp.